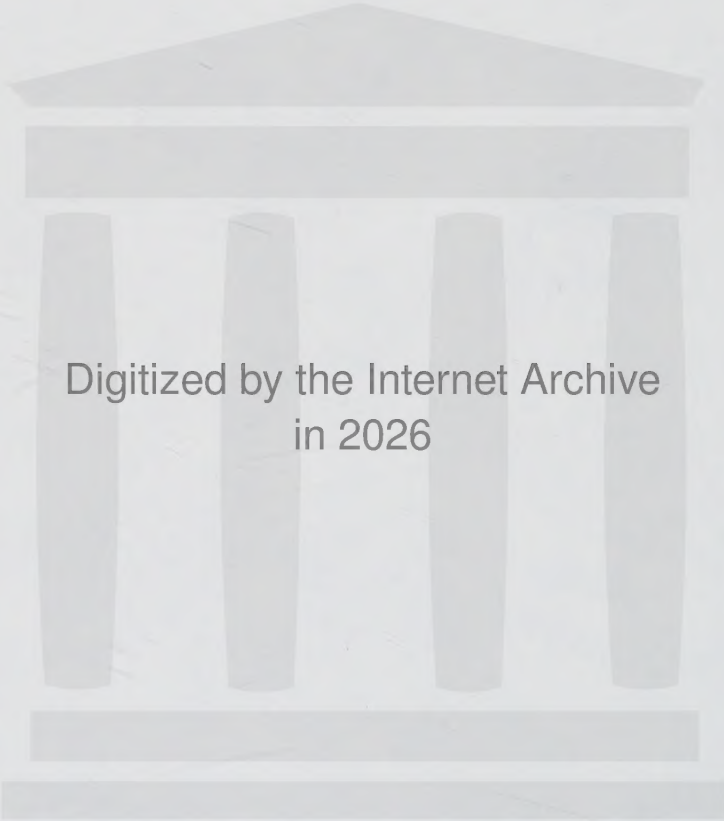


Genäherte Lösung einer singulären Eigenwertaufgabe

F. Javier Fernandez

1975



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551905_0018

Genäherte Lösung einer singulären Eigenwertaufgabe

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
des Fachbereichs Physik
der
Ludwig-Maximilians-Universität
München



vorgelegt von

F. Javier FERNANDEZ

Mai 1975

Gedruckt mit Unterstützung des Deutschen Akademischen Austauschdienstes



1. Berichterstatter: Prof. Dr. F. Bopp

2. Berichterstatter: Priv.Doiz. Dr. V. Ernst

Tag der mündlichen Prüfung: 25. Juli 1975

Für meine Frau LOURDES

Für die Möglichkeit, meine Dissertaion an seinem Lehrstuhl durchführen zu können, und für die Zusammenarbeit möchte ich Herrn Prof. Dr. F. Bopp herzlich danken.

Auch Herrn Dr. V. Ernst möchte ich besonders für die fruchtbringende Zusammenarbeit, seine vielseitige Unterstützung und für seine Ratschläge herzlich danken.

Schließlich möchte ich auch Herrn Dr. H. Maier-Bötzel und Frau Th. Hutzler für ihre Hilfe danken.

Diese Arbeit wurde mit finanzieller Unterstützung des Deutschen Akademischen Austauschdienstes durchgeführt.

Zusammenfassung

Wir beschäftigen uns hier mit der analytischen Lösung einer singulären Eigenwertaufgabe, die in einer Theorie von Bopp und Lutzenberger auftaucht. Nach einer geeigneten Transformation haben wir folgendes Problem zu lösen: Gegeben ist ein lineares System von Differentialgleichungen, dessen Koeffizienten rationale Funktionen sind, die von zwei Parametern M, m abhängen. $Z = 0$ und $Z = \infty$ sind Singulärstellen dieses Dgl.-Systems. Gesucht sind diejenigen Werte von M, m , für die eine Lösung existiert, die im Intervall $0 \leq Z < \infty$ mit einer gewissen Gewichtsfunktion quadratintegrierbar ist. Für den Bereich B von M, m , der für Eigenwerte überhaupt in Frage kommt, finden wir folgendes: Es gibt für jedes $(M, m) \in B$ eine Lösung, die bei $Z = 0$ integrierbar, und für jedes $(M, m) \in B$ eine i. a. andere Lösung, die bei $Z = \infty$ integrierbar ist. Gesucht sind diejenigen M, m , für die diese Lösungen zusammenfallen. Dafür wird eine allgemeine Theorie entwickelt. In einer gewissen Näherung berechnen wir Eigenwerte der Theorie von Bopp und Lutzenberger, die vorher nicht bekannt waren.

Inhaltsverzeichnis

<u>Kap. 1</u>	<u>Einleitung</u>	Seite
§ 1.1	Problemstellung	1
§ 1.2	Grundzüge des Lösungsverfahrens	2
§ 1.3	Genährte Berechnung der Lösungsmatrix	3
§ 1.4	Resultate	7
<u>Kap. 2</u>	<u>Allgemeines</u>	
§ 2.1	Charakter des Grund- D.Gl. Systems und seine Singulärstelle	9
§ 2.2	Ein Symmetriegesetz	11
§ 2.3	Die Ideen der reduzierten Gleichung und der Übergangmatrix $P(Z)$.	13
<u>Kap. 3</u>	<u>Strenge Lösung der reduzierten Gleichung</u>	
§ 3.1	Lösung des reduzierten D.Gl. Systems im Quadranten $\mu_1 < 0; \mu_2 > 0$	17
§ 3.2	Lösung im Quadranten $\mu_1 < 0; \mu_2 < 0$	24
§ 3.3	Lösung des reduzierten D.Gl. Systems in den Quadranten $\mu_1 > 0; \mu_2 > 0$ und $\mu_1 < 0; \mu_2 < 0$	30
<u>Kap. 4</u>	<u>Geschlossen lösbare Fälle</u>	
§ 4.1	Der Fall $\begin{cases} k=1 \\ \mu_1 = -1/2 \\ \mu_2 = \text{beliebig} \end{cases}$ Lösung der Eigenwertaufgabe	35
§ 4.2	Der Fall $\begin{cases} k=1 \\ \mu_1 = \text{beliebig} \\ \mu_2 = 1/2 \end{cases}$ Ausschluß von Eigenwerten	43
§ 4.3	Der Fall $\begin{cases} k=1, 2, 3, \dots \\ \mu_1 = 0 \\ \mu_2 = 0 \end{cases}$ Ausschluß von Eigenwerten	49

Kap. 5 Analytische Struktur des Grund-D.Gl. Systems

§ 5.1	Bestimmung der analytischen Struktur der Lösung in der außenwesentlichen Singulärstelle $z = 0$.	59
§ 5.2	Betrachtungen über die Grund-Matrix D.Gl. (5-33)	63
§ 5.3	Bestimmung einer Hauptmatrix $P^{(0)}(z)$ der Übergangsmatrix D.Gl.	66
§ 5.4	Analytische Struktur der Hauptmatrix $P^{(0)}(z)$	72
§ 5.5	Bestimmung einer Hauptmatrix der Grund-Matrix D.Gl. (5-33), deren erste Spalte eine Lösung des Grund-D.Gl. Systems ist, die die Anfangsbedingungen erfüllt	75

Kap. 6 Analytische Struktur des Grund-D.Gl. Systems bei $z = \infty$:
Ausschluß von Eigenwerten

§ 6.1	Analytische Struktur der Lösungen des Grund-D.Gl. Systems bei der wesentlichen Singulärstelle $z = \infty$	77
§ 6.2	Lösung der Matrix-Gleichung von der Gestalt $A_0 P - P A_0 = Q$ mit $A_0^2 = I$.	81
§ 6.3	Asymptotische Struktur der Übergangsmatrix $\hat{P}^{(10)}(z+1)$ im Quadranten $\mu_1 < 0; \mu_2 > 0$ bzw. $\mu_1 > 0; \mu_2 < 0$	84
§ 6.4	Asymptotische Struktur der Übergangsmatrix $\hat{P}^{(10)}(z+1)$ im Quadranten $\mu_1 > 0; \mu_2 > 0$ bzw. $\mu_1 < 0; \mu_2 < 0$: Ausschluß von Eigenwerten	95

Kap. 7 Mathematische Hilfsmittel

§ 7.1	Die Matrix-D.Gl. (1-18) bzw. (1-20) und ihre entsprechende Volterrasche - Integral-Gl. ; Beweis der Beziehung (1-35)	99
§ 7.2	Strenge Integration der Matrix-D.Gl. (1-26): Bestimmung der Matrix $E_h^{(10, \infty)}(\mu_1, \mu_2)$.	107
§ 7.3	Bestimmung einer guten Näherung der Eigenwertgleichung $\lambda_3(\mu_1, \mu_2) = 0$ im Fall $\mu_1 = -\mu_2$ und $ \mu_1 < \frac{\alpha}{2}$ (d.h. wenn $m = 0$ und $ M < \frac{\alpha}{2}$ sind).	109

1. Einleitung

1.1 Problemstellung:

In der Theorie von Bopp und Lutzenberger [1] tritt folgendes Eigenwertproblem auf:

Gegeben ist das System

$$(1.1) \quad \begin{cases} -\frac{2}{r} \left\{ \sqrt{1+r^2} \frac{d}{dr} + \frac{k}{r} + \frac{1}{r} \sqrt{1+r^2} - \frac{1}{2r\sqrt{1+r^2}} \right\} \psi_1 = \left\{ m - M - \frac{\alpha}{r^2} \sqrt{1+r^2} - \frac{\alpha}{r^2} \right\} \psi_1 \\ \frac{2}{r} \left\{ \sqrt{1+r^2} \frac{d}{dr} - \frac{k}{r} + \frac{1}{r} \sqrt{1+r^2} - \frac{1}{2r\sqrt{1+r^2}} \right\} \psi_2 = \left\{ m + M - \frac{\alpha}{r^2} \sqrt{1+r^2} - \frac{\alpha}{r^2} \right\} \psi_2 \end{cases}$$

von Differentialgleichungen für die "Radialfunktionen" $\psi_1(r)$, $\psi_2(r)$, $r \geq 0$ wobei $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ und M, m reelle Parameter sind. $\alpha = 1/137,0371\dots$ ist die Feinstrukturkonstante. Gesucht sind diejenigen Werte von M und m für die, bei gegebenem k , eine "Eigenlösung" $\psi_1(r)$, $\psi_2(r)$ existiert, so daß

$$(1.2) \quad \int_0^\infty dr r^2 \left\{ |\psi_1(r)|^2 + |\psi_2(r)|^2 \right\} < \infty$$

gilt.

Es ist die Aufgabe gestellt, dieses Problem analytisch zu lösen.

Zu diesem Zweck ist es bequemer, in (1.1) folgende Transformation der unabhängigen Veränderlichen bzw. der Funktionen $\psi_1(r)$, $\psi_2(r)$ und der Parameter M, m durchzuführen:

$$(1.3) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{1+r^2} - 1 \right\} ; \quad r \in [0, \infty) \\ \psi_1(r) = \frac{1}{(1+r^2)^{1/4} r^{1/2}} \cdot \frac{r^k}{(\sqrt{1+r^2} + 1)^k} \cdot f_1 \left(\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{1+r^2} - 1 \right\} \right) \\ \psi_2(r) = \frac{1}{(1+r^2)^{1/4} r^{1/2}} \cdot \frac{r^{k-2}}{(\sqrt{1+r^2} + 1)^{k-2}} \cdot f_2 \left(\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{1+r^2} - 1 \right\} \right) \end{cases}$$

$$(1.4) \quad \begin{cases} \mu_1 = -(M-m) \\ \mu_2 = +(M+m) \end{cases}$$

Wir stellen diese Parameter wegen technischer Gründe der weiteren Behandlung in einer Ebene (der sogenannten Parameterebene, s. Abb. 1-1) dar.

Damit geht (1.1) über in

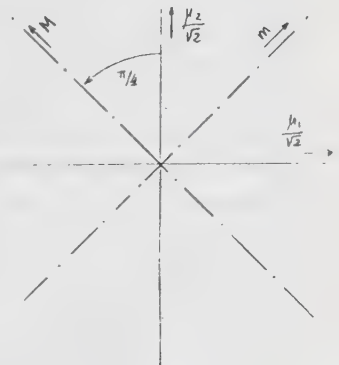


Abb. 1-1)

$$(1.5) \begin{cases} \frac{df_1}{dz} = \left\{ \mu_2 + \frac{\mu_2 - \frac{\alpha}{2}}{2} \right\} f_2(z) \\ \frac{df_2}{dz} = \left\{ -\mu_1 + \frac{\frac{\alpha}{2} + \mu_1}{2+1} \right\} f_1(z) - \frac{1-k}{2(2+1)} f_2(z) \end{cases}$$

und die Bedingung (1.2) ist dann und nur dann erfüllt, wenn die entsprechende "Eigenlösung" $f_1(z), f_2(z)$ die Bedingung

$$(1.6) \quad \int_0^{\infty} \left(\frac{2}{2+1} \right)^k \left\{ |f_1(z)|^2 + \left\{ \frac{2+1}{2} \right\}^2 |f_2(z)|^2 \right\} dz < \infty.$$

erfüllt. Wir wollen künftighin (1.5) als Grund-Differentialgleichungs-System bezeichnen. Damit haben wir unser Problem auf das folgende zurückgeführt: Gesucht sind diejenigen Werte der Parameter μ_1 und μ_2 , für die (1.5) eine Lösung $f_1(z), f_2(z)$ besitzt, so daß (1.6) gilt. Aus (1.4) erhalten wir dann die entsprechenden Werte der Parameter M, m .

Wir wollen die "Übergangsfälle" $M^2 = m^2 > 0$ von der Betrachtung ausschließen, weil sie einen erheblichen Mehraufwand an Rechenzeit erfordern. Für den Mittelpunkt $M^2 = m^2 = 0$ zeigen wir in § 4.3, daß für alle k keine Eigenlösung vorliegt. Von den verbleibenden Fällen $\mu_1, \mu_2 \geq 0$ wird in § 6.4 der Fall

$\mu_1 \cdot \mu_2 > 0$ als Eigenwert ausgeschlossen. Die allgemeine Theorie braucht also nur für den Fall $\mu_1, \mu_2 < 0$ entwickelt zu werden. Wir werden ferner in § 2.2 zeigen, daß (1.5) einem Symmetriegesetz unterliegt, das es gestattet, seine Lösung für $k < 0$ auf den Fall $k > 0$ zurückzuführen. Folglich betrachten wir im folgenden nur den Fall $k > 0, \mu_1, \mu_2 < 0$.

§ 1.2 Grundzüge des Lösungsverfahrens

Da (1.5) ein lineares Differentialgleichungssystem ist, gibt es zwei linear unabhängige Lösungen, die ein Hauptsystem bilden.

Es ist bequem, ein solches Hauptsystem zu einer 2×2 Matrix $F(z)$ zusammenzufassen, so daß die erste bzw. die zweite Spalte jeweils eine der linear unabhängigen Lösungen enthält. Wir werden sehen, daß es dann ein Hauptsystem gibt, so daß die erste Spalte von $F^{(b)}(z)$ gerade die Randbedingungen bei

$z = 0$ erfüllt, und die zweite Spalte dies gerade nicht tut (vgl. § 5.5).

Ferner gibt es immer ein Hauptsystem $F^{(a)}(z)$, so daß die erste Spalte die Randbedingungen bei $z = \infty$ erfüllt und die zweite dies nicht tut (vgl. § 6.3).

Ferner wissen wir aus der allgemeinen Theorie, daß eine Konstantenmatrix

$$(1.7) \quad A(\mu_1, \mu_2) \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1(\mu_1, \mu_2) & \lambda_2(\mu_1, \mu_2) \\ \lambda_3(\mu_1, \mu_2) & \lambda_4(\mu_1, \mu_2) \end{pmatrix}$$

existiert, so daß

$$(1.8) \quad F^{(0)}(z) = F^{(\infty)}(z) \Lambda(\mu_1, \mu_2)$$

Ein Paar (μ_1, μ_2) ist daher dann ein Eigenwert, wenn

$$(1.9) \quad \lambda_3(\mu_1, \mu_2) = 0 \text{ ist.}$$

Dann erfüllt nämlich die erste Spalte von $F^{(0)}(z)$ auch die Randbedingungen bei $z = \infty$ und ist also eine Eigenlösung. Die Matrix (1.7) wollen wir "Lösungsmatrix" nennen.

§ 1.3 Genäherte Berechnung der Lösungsmatrix

Das eigentliche Problem besteht nach (1.8) und (1.9) in der expliziten Berechnung der Matrix $\Lambda(\mu_1, \mu_2)$. Es ist möglich, $\lambda_3(\mu_1, \mu_2)$ durch eine konvergente Reihe darzustellen. Wir wollen das aber hier nicht tun, und nur eine Näherung für $\Lambda(\mu_1, \mu_2)$ angeben, die für die Anwendungen hinreichend ist.

Das geschieht so: Wir zeigen (vgl. § 5.4, § 3.1) und § 3.2), daß eine "Übergangsmatrix" $P_k^{(0)}\left(\frac{z}{z+1}\right)$ und eine "reduzierte Matrix" $V^{(0)}(k+1)$ existieren, so daß

$$(1.10) \quad F^{(0)}(z) = P_k^{(0)}\left(\frac{z}{z+1}\right) V^{(0)}(k+1) (V^{(0)}(1))^{-1}$$

gilt.

$P_k^{(0)}(x)$ hat die Form:

$$(1.11) \quad P_k^{(0)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} R_{k,n}^{(0)}(\mu_1, \mu_2) x^{n+1-k} + \mu x \sum_{n=0}^{\infty} S_{k,n}^{(0)}(\mu_1, \mu_2) x^n,$$

wobei $R_{k,n}^{(0)}(\mu_1, \mu_2)$, $S_{k,n}^{(0)}(\mu_1, \mu_2)$ gegebene Zahlenmatrizen sind; speziell gilt

$$(1.12) \quad \begin{cases} R_{1,0}^{(0)}(\mu_1, \mu_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; & S_{1,0}^{(0)}(\mu_1, \mu_2) = \begin{pmatrix} 0 & \mu_1 - \frac{\alpha}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ R_{k,0}^{(0)}(\mu_1, \mu_2) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\mu_1 - \frac{\alpha}{2}}{1-k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; & S_{k,0}^{(0)}(\mu_1, \mu_2) = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1(\mu_1, \mu_2) \\ 0 & \beta_2(\mu_1, \mu_2) \end{pmatrix}, \end{cases}$$

wobei $\beta_1(\mu_1, \mu_2)$; $\beta_2(\mu_1, \mu_2)$ gegebene Funktionen von μ_1, μ_2 sind.

$V^{(0)}(k+1)$ ist eine in $0 \leq z < \infty$ analytisch und explizit bekannte Matrix, deren asymptotische Entwicklung für große Werte von z lautet:

$$(1.13) \quad V^{(0)}(z+1) \sim \left(\sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(0)}(\mu_1, \mu_2) \left(\frac{1}{z+1} \right)^n \right) \left(\frac{1}{z+1} \right)^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{\beta \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \ln(z+1)}$$

wobei $V_0^{(\infty)}(\mu_1, \mu_2)$ (s. (3.44) und (3.83)) so gegeben ist:

$$(1.14) \quad V_0^{(\infty)}(\mu_1, \mu_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left| \frac{\mu_1}{\mu_2} \right| \right\}^{\frac{1}{2}} & \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left| \frac{\mu_1}{\mu_2} \right| \right\}^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

Das Plus- bzw. Minus-Vorzeichen in (1.14) gilt für $\mu_1 < 0; \mu_2 > 0$ bzw. $\mu_1 > 0; \mu_2 < 0$. τ_1 und β sind in (3.4) für $\mu_1 < 0; \mu_2 > 0$ bzw. in (3.50) für $\mu_1 > 0; \mu_2 < 0$ gegebene Funktionen von μ_1, μ_2 .

An der Form (1.11) erkennt man nicht ohne weiteres, daß die erste Spalte von $F^{(1)}(z)$ die Randbedingungen bei $z = 0$ erfüllt, es ist aber so (s. Hilfssatz 5.1 im 5. Kapitel).

Ferner zeigen wir (§ 6.3), daß wir $F^{(1)}(z)$ in der Form

$$(1.15) \quad F^{(1)}(z) = \hat{P}_k^{(1)}\left(\frac{z}{z+1}\right) V^{(1)}(z+1)$$

schreiben können. $\hat{P}_k^{(1)}\left(\frac{z}{z+1}\right)$ läßt sich für große Werte von z in eine asymptotische Reihe

$$(1.16) \quad \hat{P}_k^{(1)}\left(\frac{z}{z+1}\right) \sim \sum_{n=0}^{\infty} P_{k,n}^{(1)}(\mu_1, \mu_2) (z+1)^{-n}$$

mit $P_{k,0}^{(1)} = I$ entwickeln.

In der Veränderlichen

$$(1.17) \quad x = \frac{z}{z+1} \quad \left(z = \frac{x}{1-x} ; z+1 = \frac{1}{1-x} \right)$$

erhalten wir aus den Differentialgleichungen für $F(z)$ und $V(z+1)$, daß sowohl $P_k^{(1)}(x)$ als auch $\hat{P}_k^{(1)}(x)$ Lösungen der Matrix-Diff. Gleichung (s. (2.30))

$$(1.18) \quad \frac{d}{dx} P_k(x) = \frac{1}{x} B_0(\mu_1, \mu_2) P_k(x) + \frac{1}{1-x} [B_1(\mu_1, \mu_2); P_k(x)] + \frac{x}{(1-x)^2} [B_2(\mu_1, \mu_2); P_k(x)]$$

mit

$$(1.19) \quad B_0(\mu_1, \mu_2) \doteq \begin{pmatrix} 0 & \mu_1 - \frac{\mu_2}{2} \\ 0 & 1 - \mu_1 \end{pmatrix}; B_1(\mu_1, \mu_2) \doteq \begin{pmatrix} 0 & 2\mu_1 - \frac{\mu_2}{2} \\ \frac{\mu_2}{2} & 0 \end{pmatrix}; B_2(\mu_1, \mu_2) = \begin{pmatrix} 0 & \mu_2 \\ -\mu_1 & 0 \end{pmatrix}$$

sind. Sei ferner $R_k(x)$ eine Hauptmatrix von

$$(1.20) \quad \frac{d}{dx} R_k(x) = \frac{1}{1-x} [B_1(\mu_1, \mu_2); R_k(x)] + \frac{x}{(1-x)^2} [B_2(\mu_1, \mu_2); R_k(x)]$$

dann erhalten wir folgendes sehr wichtiges Ergebnis:

Ist $P_k^{(e)}(x)$ eine Hauptmatrix von (1.18), dann erhalten wir durch Rechtsmultiplikation mit $R_0(x)$ wieder eine Hauptmatrix

$$(1.21) \quad P_k^{(1)}(x) = P_k^{(2)}(x) R_0(x) \quad \text{von (1.18):}$$

Der Beweis ergibt sich leicht aus der Kommutatoridentität

$$(1.22) \quad [a, bc] = [a, b]c + b[a, c]$$

Die allgemeine Hauptmatrix von (1.20) lautet

$$(1.23) \quad R(x) = V^{(w)}\left(\frac{1}{1-x}\right) C(\mu_i, \mu_t) \left(V^{(w)}\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)^{-1},$$

wobei $C(\mu_i, \mu_t)$ eine nicht singuläre Zahlenmatrix und $V^{(w)}\left(\frac{1}{1-x}\right)$ eine Hauptmatrix der reduzierten Matrix-Differentialgleichung

$$(1.24) \quad \frac{d}{dx} V\left(\frac{1}{1-x}\right) = \left\{ \frac{1}{1-x} B_1(\mu_i, \mu_t) + \frac{x}{(1-x)^2} B_2(\mu_i, \mu_t) \right\} V\left(\frac{1}{1-x}\right) \quad \text{ist.}$$

Darüber hinaus ist es klar, daß jedem Paar $P_k^{(1)}(x)$ und $P_k^{(2)}(x)$ von Hauptmatrizen von (1.18) eine eindeutige Zahlenmatrix $C_k^{(1,2)}(\mu_i, \mu_t)$ zugeordnet ist, so daß

$$(1.25) \quad P_k^{(1)}(x) = P_k^{(2)}(x) V^{(w)}\left(\frac{1}{1-x}\right) C_k^{(1,2)}(\mu_i, \mu_t) \left(V^{(w)}\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)^{-1}$$

Das bleibt insbesondere richtig, wenn wir $P_k^{(1)}(x) = P_k^{(0)}(x)$; $P_k^{(2)}(x) = P_k^{(w)}(x)$ wählen und die entsprechende Matrix $C_k^{(1,2)}(\mu_i, \mu_t)$ mit $C_k^{(0,w)}(\mu_i, \mu_t)$ bezeichnen.

Nun betrachten wir ferner die Matrix-Diff.Gleichung

$$(1.26) \quad \frac{d}{dx} Q_k(x) = \frac{1}{x} B_0(\mu_i, \mu_t) Q_k(x) + \frac{1}{1-x} [B_1(\mu_i, \mu_t); Q_k(x)]$$

Mutatis mutandis lassen sich für (1.26) folgende Ergebnisse erreichen:

Sei $T_0(x)$ eine Hauptmatrix von

$$(1.27) \quad \frac{d}{dx} T(x) = \frac{1}{1-x} [B_1(\mu_i, \mu_t); T(x)]$$

und sei $Q_k^{(2)}(x)$ eine Hauptmatrix von (1.26), dann ist

wieder eine Hauptmatrix von (1.26). Die allgemeine Hauptmatrix von (1.26) lautet

$$(1.28) \quad T(x) = S^{(0)}(x) E(S^{(w)}(x))^{-1},$$

wobei $S^{(0)}(x)$ eine Hauptmatrix von

$$(1.29) \quad \frac{dS(x)}{dx} = \left\{ \frac{1}{1-x} B_1(\mu_1, \mu_2) \right\} S(x)$$

ist. Daher ist jedem Paar $A_k^{(1)}(x)$ und $A_k^{(2)}(x)$ von Hauptmatrizen von (1.26) eine eindeutige Zahlenmatrix $E_k^{(1,2)}(\mu_1, \mu_2)$ zugeordnet, so daß

$$(1.30) \quad A_k^{(1)}(x) = A_k^{(2)} S^{(0)}(x) E_k^{(1,2)}(\mu_1, \mu_2) (S^{(0)}(x))^{-1}$$

gilt. Sei nun $A_k^{(0)}(x)$ diejenige Lösung von (1.26), für die gilt

$$(1.31) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \hat{A}_k^{(0)}(x) = I$$

und sei $A_k^{(0)}(x)$ eine Hauptmatrix von (1.26), die folgende Struktur besitzt

$$(1.32) \quad A_k^{(0)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} R'_{k,n}(\mu_1, \mu_2) x^{n+1-k} + \ln x \sum_{n=0}^{\infty} S'_{k,n}(\mu_1, \mu_2) x^n,$$

wobei $R'_{k,n}(\mu_1, \mu_2)$, $S'_{k,n}(\mu_1, \mu_2)$ bis auf eine multiplikative Konstante der Gestalt $\pi(\mu_1, \mu_2)$ mit den entsprechenden Matrizen $R_{k,n}^{(0)}(\mu_1, \mu_2)$, $S_{k,n}^{(0)}(\mu_1, \mu_2)$ für die Entwicklung von $P_k^{(0)}(x)$ (s. (1.12)) übereinstimmen. Damit erhalten wir aus (1.30), daß mit einer bestimmten Zahlenmatrix $E_k^{(1,2)}(\mu_1, \mu_2)$ gilt

$$(1.33) \quad A_k^{(0)}(x) = A_k^{(0)}(x) S^{(0)}(x) E_k^{(1,2)}(\mu_1, \mu_2) (S^{(0)}(x))^{-1}.$$

Dieses $E_k^{(1,2)}(\mu_1, \mu_2)$ hängt noch von der Wahl von $S^{(0)}(x)$ ab. Wir werden zeigen (§ 7.1): Wenn $S^{(0)}(x)$ so ausgewählt ist, daß

$$(1.34) \quad \lim_{x \rightarrow 0} S^{(0)}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} V^{(0)}\left(\frac{1}{1-x}\right) = V^{(0)}(1)$$

gilt, (das ist immer möglich, denn (1.24) und (1.29) besitzen eine Regulärstelle bei $x = 0$), dann ist

$$(1.35) \quad C_k^{(1,2)}(\mu_1, \mu_2) = E_k^{(0,1)}(\mu_1, \mu_2) + O(\mu_1, \mu_2).$$

Wir können aber (1.26) und (1.29) in Strenge integrieren (s. § 7.2). Daraus folgt, daß wir auch $E_k^{(0,1)}(\mu_1, \mu_2)$ in einer analytisch geschlossenen Form bestimmen können und damit auch $C_k^{(1,2)}(\mu_1, \mu_2)$. Nun gilt nach (1.8), (1.10) und (1.15)

$$\Lambda(\mu_1, \mu_2) V^{(0)}(1) = C_k^{(0,1)}(\mu_1, \mu_2) = E_k^{(0,1)}(\mu_1, \mu_2) + O(\mu_1, \mu_2)$$

Daraus folgt

$$(1.36) \quad \Lambda(\mu_1, \mu_2) = E_k^{(0,1)}(\mu_1, \mu_2) (V^{(0)}(1))^{-1} + O(\mu_1, \mu_2).$$

Wir erhalten so aus (1.36) und (1.3)

$$(1.37) \quad \Lambda(\mu_1, \mu_2) = (V^{(\omega)}(1))^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) & -\frac{\sigma}{\alpha}(\theta_1 - \theta_2) \\ -\frac{\alpha}{2\sigma}(\theta_1 - \theta_2) & \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}$$

mit

$$(1.38) \quad \theta_1 = \frac{\Gamma(k) \Gamma(1-2\sigma)}{\Gamma(1+\beta_1-\sigma) \Gamma(k-\beta_1-\sigma)} \quad ; \quad \theta_2 = \frac{\Gamma(k) \Gamma(1+2\sigma)}{\Gamma(1+\beta_1+\sigma) \Gamma(k-\beta_1+\sigma)}$$

$$\beta_1 = \frac{k-1}{2} - \sqrt{\left(\frac{k-1}{2}\right)^2 + \mu_2 \frac{\alpha}{2}} \quad ; \quad \sigma = \sqrt{\frac{\alpha}{2} \left(\frac{1}{2}\mu_2 - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

Die Eigenwertgleichung lautet dann

$$(1.39) \quad v_3^{(\omega)}(1) \{ \theta_1(\mu_1, \mu_2) + \theta_2(\mu_1, \mu_2) \} + v_1^{(\omega)}(1) \{ \theta_1(\mu_1, \mu_2) - \theta_2(\mu_1, \mu_2) \} \frac{\alpha}{2\sigma} = O(\mu_1, \mu_2)$$

Für $k=1$ und $\mu_2 = \frac{\alpha}{2}$ gilt speziell

$$(1.40) \quad v_3^{(\omega)}(1) = 0$$

§ 1.4 Resultate

Wir haben schon in (1.10) gesehen, daß ein Paar (μ_1, μ_2) genau dann Eigenwert ist, wenn $\lambda_3(\mu_1, \mu_2) = 0$. Speziell sind wir interessiert an Paaren der Gestalt $(d.h. (M, 0))$, wobei zusätzlich $|\mu_1| \ll \frac{\alpha}{2}$ (d.h. $|M| \ll \frac{\alpha}{2}$) ist.

a) Sei nun $\mu_2 > 0$ (d.h. $M > 0$) und $k \gg 1$, dann erhalten wir aus (7.77) für unsere Eigenwertgleichung:

$$(1.41) \quad \cos \left\{ \pi/4 + \frac{\alpha}{2} \ln \frac{1}{2} \mu_2 \right\} + \text{Arg} \{K\} = \tilde{O}(\mu_2) \quad ,$$

$$\text{wobei} \quad \tilde{O}(\mu_2) = \begin{cases} O(\mu_2)^{1/2} & \text{für } k=1 \\ O(\mu_2) & \text{" } k > 1 \end{cases}$$

bedeutet. Die Lösungen der Eigenwertgleichung lassen sich in diesem Fall folgendermaßen ausdrücken (s. (1.4))

$$(1.42) \quad M^{(\nu)} = \mu_1^{(\nu)} = \frac{1}{2} \exp \left\{ - (2\nu + 3/2) \pi/\alpha - \frac{\alpha}{2} \text{Arg} \{K\} \right\} (1 + \tilde{O}(M^{(\nu)})) \quad ,$$

wobei $\text{Arg} \{K\}$ in (7.100) gegeben ist.

Dementsprechend lautet eine ganz gute Näherung für unsere Eigenwerte in diesem Fall

$$(1.43) \quad M^{(\nu)} = \mu_1^{(\nu)} \approx \frac{1}{2} \exp \left\{ - (2\nu + 3/2) \pi/\alpha - \frac{\alpha}{2} \text{Arg} \{K\} \right\} \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots)$$

$$M^{(0)} \approx 9.5 \cdot 10^{-22}$$

$\frac{2}{\alpha} \text{Arg} \{K\}$ ist von der Ordnung 1 und deshalb klein gegenüber dem ersten Term. Die Abhängigkeit von k ist sehr schwach. Es ist hier zu erwähnen, daß in der schon genannten Arbeit von Bopp und Lutzenberger kein Eigenwert unter diesen Bedingungen gefunden wurde.

b) Sei nun $\mu_1 < 0$ (d.h. $M < 0$) und $k \gg 1$, dann erhalten wir aus (7.84) für unsere Eigenwertgleichung:

$$(1.44) \quad \cos \left\{ -\pi/4 + \frac{\alpha}{2} \ln \{2|\mu_1|\} + \text{Arg} \{K\} \right\} = \tilde{O}(|\mu_1|)$$

Die Lösungen der Eigenwertgleichung lassen sich in diesem Fall folgendermaßen ausdrücken (s. (1.4)):

$$(1.45) \quad |M^{(\nu)}| = |\mu_1^{(\nu)}| = \frac{1}{2} \exp \left\{ - (2\nu + 1/2) \pi/\alpha - \frac{2}{\alpha} \text{Arg} \{K\} \right\} (1 + \tilde{O}(|M^{(\nu)}|))$$

($\nu = 0, 1, \dots$)

Dementsprechend lautet eine ganz gute Näherung für unsere Eigenwerte in diesem Fall

$$(1.46) \quad \begin{cases} |M^{(\nu)}| = |\mu_1^{(\nu)}| \cong \frac{1}{2} \exp \left\{ - (2\nu + 1/2) \pi/\alpha - \frac{2}{\alpha} \text{Arg} \{K\} \right\} & (\nu = 0, 1, \dots) \\ |M^{(0)}| \cong 0,9 \cdot 10^{-93} \end{cases}$$

Die Größenordnung von $|M^{(0)}|$ ist ungefähr 10^{-3} kleiner als der Eigenwert, den Bopp und Lutzenberger angegeben haben.

Wenn $k = -1, -2, \dots$ ist, erhalten wir wegen des Symmetriegesetzes

$$(1.47) \quad \begin{cases} M > 0; \quad |M^{(\nu)}| = |\mu_1^{(\nu)}| \cong \frac{1}{2} \exp \left\{ - (2\nu + 1/2) \pi/\alpha - \frac{2}{\alpha} \text{Arg} \{K\} \right\} & (\nu = 0, 1, \dots) \\ M < 0; \quad |M^{(\nu)}| = |\mu_1^{(\nu)}| \cong \frac{1}{2} \exp \left\{ - (2\nu + 1/2) \pi/\alpha - \frac{2}{\alpha} \text{Arg} \{K\} \right\} & (\nu = 0, 1, \dots), \end{cases}$$

wobei nun in $\text{Arg} \{K\}$ k durch $k+1$ zu ersetzen ist.

2. Allgemeines

Im folgenden betrachten wir allgemeine Eigenschaften der Struktur unseres Differentialgleichungssystems (Singularstellen, Symmetrien usw.). Außerdem führen wir die Idee des "reduzierten Diff.Gl.Systems" ein.

§ 2.1 Charakter des Grund-Diff-Gl.-Systems und seine Singularstellen

Betrachten wir nun das Grund-Diff-Gl.-System (1.5) in der folgenden Gestalt

$$(2.1) \quad \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mu_2 + \frac{\mu_1 - \frac{\alpha}{2}}{z} \\ -\mu_1 + \frac{\frac{\alpha}{2} + \mu_1}{z+1} & \frac{1-k}{z(z+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \end{pmatrix}$$

Wir sehen, daß es sich um ein lineares Diff.Gl.System handelt, dessen Koeffizientenmatrix aus rationalen Funktionen besteht.

Einige dieser Funktionen besitzen einfache Pole bei $z = -1$ oder bei $z = 0$. Folglich hat unser Diff.Gl.-System in diesen Punkten eine außerwesentliche Singularstelle. Um den Charakter der Singularstelle bei $z = \infty$ zu erkennen, führen wir in (2.1) folgende Transformation der unabhängigen Veränderlichen durch:

$$(2.2) \quad z = \frac{1}{t}$$

Dann geht (2.1) über in das Diff.Gl.-System:

$$(2.3) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mu_2 - \frac{\mu_1 - \frac{\alpha}{2}}{t} \\ \frac{\mu_1}{t^2} - \frac{\frac{\alpha}{2} + \mu_1}{t(t+1)} & -\frac{1-k}{t(t+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$$

Nun sehen wir, daß einige der Elemente der Koeffizienten-Matrix im allgemeinen bei $t = 0$ zweifache Pole besitzen. Folglich stehen wir bei $z = \infty$ im allgemeinen vor einer wesentlichen Singularstelle.

Da $z \in [0, \infty]$ unser Integrationsintervall ist, ist unser Problem eine singuläre Eigenwertaufgabe. Weil das Diff.Gl.-System aber linear ist, lassen sich alle wohlbekannten Resultate der allgemeinen Theorie linearer Systeme auf unseren Fall übertragen. Wir skizzieren hier das für uns Wichtige.

1. Jede Lösung $\begin{pmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \end{pmatrix}$ von (2.1) kann nur Singularitäten besitzen, wo die Koeffizientenmatrix singularär ist. [2], d.h. in $z = 0$; $z = -1$; $z = \infty$. Daraus folgt, daß die Lösungen von (2.1) für $z \in (0, \infty)$ analytisch sind.
2. Es gibt genau zwei linear unabhängige Lösungen $\begin{pmatrix} f_{1,1}(z) \\ f_{2,1}(z) \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} f_{1,2}(z) \\ f_{2,2}(z) \end{pmatrix}$.

Zwei Lösungen heißen linear unabhängig, wenn

$$\Delta(\lambda) := f_{1,1}(\lambda) f_{2,2}(\lambda) - f_{1,2}(\lambda) f_{2,1}(\lambda) \neq 0 \quad \forall \lambda \in (0; \infty)$$

Ein Paar solcher Lösungen bilden ein Hauptsystem. Die Determinante $\Delta(\lambda)$ löst die Differentialgleichung

$$(2.4) \quad \frac{d}{d\lambda} \Delta(\lambda) = \text{Sp}\{A\} \Delta(\lambda),$$

wobei A die Koeffizientenmatrix in (2.1) ist und $\text{Sp}\{A\}$ die Summe der Diagonalelemente angibt. Daher gilt in unserem Fall

$$(2.5) \quad \Delta(\lambda) = K_0 \left(\frac{\lambda}{\lambda+1} \right)^{1-k}, \quad \forall \lambda \in (0; \infty),$$

wobei K_0 in Bezug auf λ eine Konstante ist, die von den Parametern μ_1 und μ_2 abhängt.

3. Jede Lösung $\begin{pmatrix} f_1(\lambda) \\ f_2(\lambda) \end{pmatrix}$ von (2.1) läßt sich in eindeutiger Weise nach einem Hauptsystem entwickeln:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} f_1(\lambda) &= c_1(\mu_1, \mu_2) f_{1,1}(\lambda) + c_2(\mu_1, \mu_2) f_{1,2}(\lambda) \\ f_2(\lambda) &= c_1(\mu_1, \mu_2) f_{2,1}(\lambda) + c_2(\mu_1, \mu_2) f_{2,2}(\lambda) \end{aligned}$$

Wenn wir ein Hauptsystem zu einer Matrix

$$(2.7) \quad F(\lambda) = \begin{pmatrix} f_{1,1}(\lambda) & f_{1,2}(\lambda) \\ f_{2,1}(\lambda) & f_{2,2}(\lambda) \end{pmatrix}$$

zusammenfassen, dann gibt es eine in Bezug auf λ konstante Matrix $B(\mu_1, \mu_2)$, so daß für je zwei Hauptsysteme $F^{(1)}(\lambda)$, $F^{(2)}(\lambda)$ gilt

$$(2.8) \quad F^{(1)}(\lambda) = F^{(2)}(\lambda) B(\mu_1, \mu_2)$$

Das haben wir in (1.8) benutzt.

§ 2.2 Ein Symmetriegesetz

Das Diff.Gl.-System (2.1) unterliegt einem Symmetriegesetz, das es gestattet, seine Lösung für $k < 0$ auf den Fall $k > 0$ zurückzuführen.

Wir können diesen Sachverhalt folgendermaßen formulieren:

Hilfssatz 2-1: Das Diff.Gl.-System (2.1) bleibt gegenüber folgender Transformation invariant:

$$(2.9) \quad \left\{ \begin{array}{ll} f_1(z) \longrightarrow \beta \left(\frac{z}{z+1} \right)^{-k} f_2(z) \\ f_2(z) \longrightarrow - \left(\frac{z}{z+1} \right)^{1-k} f_1(z) \\ \mu_1 \longrightarrow \frac{1}{\beta} \mu_2 \\ \mu_2 \longrightarrow \beta \mu_1 \\ \frac{\alpha}{z} \longrightarrow \beta \left(\mu_1 + \frac{\alpha}{z} \right) = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\alpha}{z} - \mu_1 \right) \\ k \longrightarrow 1-k \end{array} \right.$$

Dabei ist

$$(2.10) \quad \beta := \left\{ \frac{\frac{\alpha}{z} - \mu_2}{\mu_1 + \frac{\alpha}{z}} \right\}^{1/2}$$

Beweis:

Die behauptete Invarianz bedeutet folgendes: Wenn die Funktionen $\left\{ \begin{array}{l} f_1'(z; \mu_1', \mu_2', \frac{\alpha'}{z}; k') \\ f_2'(z; \mu_1', \mu_2', \frac{\alpha'}{z}; k') \end{array} \right.$

die Komponenten einer Lösung des Diff.-Gl.-Systems (2.1) für

$$(2.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_1 = \mu_1' \\ \mu_2 = \mu_2' \\ \alpha = \alpha' \\ k = k' \end{array} \right.$$

sind, dann sind die Funktionen

$$(2.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_1(z) = \beta \left(\frac{z}{z+1} \right)^{k-1} f_1'(z) \\ g_2(z) = - \left(\frac{z}{z+1} \right)^k f_2'(z) \end{array} \right.$$

die Komponenten einer Lösung des Diff.Gl.-Systems (2.1) für die Parameterwerte

$$(2.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_1 = \mu_1'' = \frac{1}{\beta} \mu_1' \\ \mu_2 = \mu_2'' = \beta \mu_2' \\ \frac{\alpha}{z} = \frac{\alpha''}{z} = \frac{1}{\beta} \left(\mu_1' + \frac{\alpha'}{z} \right) = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\alpha'}{z} - \mu_1' \right) \\ k = k'' = 1-k' \end{array} \right.$$

Seien $\begin{pmatrix} f_1'(z) \\ f_2'(z) \end{pmatrix}$ eine Lösung der Diff.Gl.

$$(2.14) \quad \begin{aligned} \frac{df_1'}{dz} &= \left\{ \mu_1' + \frac{\mu_1' - \frac{\alpha'}{z}}{z} \right\} f_2'(z) \\ \frac{df_2'}{dz} &= \left\{ -\mu_1' + \frac{\frac{\alpha'}{z} + \mu_1'}{z+1} \right\} f_1'(z) + \frac{1-k'}{z(z+1)} f_2'(z) \end{aligned}$$

Nun bilden wir die Ausdrücke

$$(2.15) \quad \begin{aligned} g_1(z) &:= \beta \left(\frac{z}{z+1} \right)^{k'-1} f_2'(z) \\ g_2(z) &:= - \left(\frac{z}{z+1} \right)^{k'} f_1'(z) \end{aligned}$$

Für die $g_i(z)$ erhalten wir die Diff.Gl.

$$(2.16) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dz} g_1(z) &= \left\{ \beta \mu_1' + \frac{(-\beta \frac{\alpha'})}{z} \right\} g_1(z) \\ \frac{d}{dz} g_2(z) &= \left\{ -\frac{\mu_1'}{\beta} + \frac{\frac{\alpha'}{z\beta}}{z+1} \right\} g_1(z) + \frac{k'}{z(z+1)} g_2(z) \end{aligned}$$

Nun setzen wir

$$(2.17) \quad \begin{cases} \mu_1'' = \beta \mu_1' & ; \quad \mu_1'' - \frac{\alpha''}{z} = -\beta \frac{\alpha'}{z} \\ \mu_1'' = \frac{1}{\beta} \mu_1' & \quad \frac{\alpha''}{z} + \mu_1'' = \frac{\alpha'}{z\beta} \\ k'' = 1 - k' \end{cases}$$

(d.h. wir nehmen μ_1'', μ_1' etc. wie in (2.13) angegeben ist), dann erhalten wir für (2.16)

$$(2.18) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dz} g_1(z) &= \left\{ \mu_1'' - \frac{\mu_1'' - \frac{\alpha''}{z}}{z} \right\} g_2(z) \\ \frac{d}{dz} g_2(z) &= \left\{ -\mu_1'' + \frac{\frac{\alpha''}{z} + \mu_1''}{z+1} \right\} g_1(z) + \frac{1-k''}{z(z+1)} g_2(z) \end{aligned}$$

was zu beweisen wäre.

§ 2.3 Die Ideen der reduzierten Gleichung und der Übergangsmatrix $P(z)$

Nun betrachten wir das Diff.Gl.-System (2.1) in der Gestalt

$$(2.19) \quad \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \end{pmatrix} = A(z) \begin{pmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \end{pmatrix},$$

wobei die Matrix $A(z)$ mit den Abkürzungen

$$(2.20) \quad \begin{cases} \vartheta = \mu_2 - \frac{1}{2} \\ \delta = \frac{\alpha}{2} + \mu_1 \end{cases}$$

durch

$$(2.21) \quad A(z) = \begin{pmatrix} 0 & \mu_2 + \frac{\vartheta}{2} \\ -\mu_1 + \frac{\delta}{2} & \frac{1-k}{2(z+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mu_2 + \frac{\vartheta}{2} \\ -\mu_1 + \frac{\delta}{2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \vartheta \\ 0 & 1-k \end{pmatrix} \frac{1}{2(z+1)} =: B(z) + \begin{pmatrix} 0 & \vartheta \\ 0 & 1-k \end{pmatrix} \frac{1}{2(z+1)}$$

gegeben ist.

Für große Werte von z gilt daher

$$(2.22) \quad A(z) = B(z) + O(1/z)$$

Nun betrachten wir die "reduzierte Diff.Gleichung"

$$(2.23) \quad \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} u_1(z) \\ u_2(z) \end{pmatrix} = B(z) \begin{pmatrix} u_1(z) \\ u_2(z) \end{pmatrix}$$

Damit taucht folgende Problematik auf: Gegeben sei eine Lösung $\begin{pmatrix} f_1^{(1)}(z) \\ f_2^{(1)}(z) \end{pmatrix}$ des Diff.Gl.-Systems (2.1). Wir fragen, ob es eine Lösung $\begin{pmatrix} u_1(z) \\ u_2(z) \end{pmatrix}$ von (2.23) gibt, so daß gilt

$$(2.24) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f_1^{(1)}(z)}{u_1^{(1)}(z)} = 1; \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f_2^{(1)}(z)}{u_2^{(1)}(z)} = 1$$

Noch wichtiger ist diese Frage: Kann man aus der asymptotischen Entwicklung

$$(2.25) \quad \begin{cases} u_1^{(1)}(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} u_{n,1}^{(1)} z^{-n} \\ u_2^{(1)}(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} u_{n,2}^{(2)} z^{-n} \end{cases}$$

für die Komponenten einer Lösung $\begin{pmatrix} u_1^{(1)}(z) \\ u_2^{(1)}(z) \end{pmatrix}$ von (2.23) die entsprechende asymptotische Entwicklung für die Komponenten der Lösung $\begin{pmatrix} f_1^{(1)}(z) \\ f_2^{(1)}(z) \end{pmatrix}$ gewinnen?

Wir werden später sehen, daß diese Frage mit Ja zu beantworten ist.

Doch an dieser Stelle wollen wir nicht tiefer in diese Problematik eingehen. Vielmehr sind wir an der Möglichkeit interessiert, eine Matrixfunktion $P(\lambda)$ zu finden, die die Lösungen des Diff.-Gl.-Systems (2.1) aus den Lösungen des reduzierten Diff.-Gl.-Systems (2.23) gewinnen läßt. Damit ist folgendes gemeint: Sei $\begin{pmatrix} u_1(\lambda) \\ u_2(\lambda) \end{pmatrix}$ eine beliebige Lösung der reduzierten Diff.-Gl. (2.23). Wir suchen eine Matrix $P(\lambda)$, so daß

$$(2.26) \quad \begin{pmatrix} u_1(\lambda) \\ u_2(\lambda) \end{pmatrix} = P(\lambda) \begin{pmatrix} v_1(\lambda) \\ v_2(\lambda) \end{pmatrix}$$

eine Lösung von (2.1) ergibt. Dann muß $P(\lambda)$ die Diff.-Gl.

$$(2.27) \quad \left\{ \frac{d}{d\lambda} P(\lambda) \right\} \begin{pmatrix} v_1(\lambda) \\ v_2(\lambda) \end{pmatrix} + P(\lambda) \frac{d}{d\lambda} \begin{pmatrix} v_1(\lambda) \\ v_2(\lambda) \end{pmatrix} = A(\lambda) P(\lambda) \begin{pmatrix} v_1(\lambda) \\ v_2(\lambda) \end{pmatrix}$$

lösen. Nun verlangen wir von $P(\lambda)$, daß es in $\lambda \in (0, \infty)$ nicht singular sei, d.h. daß $[P(\lambda)]^{-1}$ existiert. Dann folgt aus (2.27)

$$(2.28) \quad \frac{d}{d\lambda} \begin{pmatrix} u_1(\lambda) \\ u_2(\lambda) \end{pmatrix} = \left\{ -P^{-1}(\lambda) \frac{d}{d\lambda} P(\lambda) + P^{-1}(\lambda) A(\lambda) P(\lambda) \right\} \begin{pmatrix} v_1(\lambda) \\ v_2(\lambda) \end{pmatrix}$$

Da (2.28) mit (2.23) übereinstimmen muß, erhalten wir

$$(2.29) \quad -P^{-1}(\lambda) \frac{d}{d\lambda} P(\lambda) + P^{-1}(\lambda) A(\lambda) P(\lambda) = B(\lambda)$$

oder

$$(2.30) \quad \frac{d}{d\lambda} P(\lambda) = A(\lambda) P(\lambda) - P(\lambda) B(\lambda)$$

Die Frage, ob es eine solche Matrix $P(\lambda)$ gibt, kann man jetzt beantworten. Dazu machen wir für $P(\lambda)$ in (2.30) den Ansatz

$$(2.31) \quad P(\lambda) = F_0(\lambda) \phi(\lambda) V_0^{-1}(\lambda),$$

wobei $F_0(\lambda)$ bzw. $V_0(\lambda)$ Hauptlösungen der Matrix-Diff.-Gl.

$$(2.32) \quad \begin{cases} (a) & \frac{d}{d\lambda} F(\lambda) = A(\lambda) F(\lambda) \\ (b) & \frac{d}{d\lambda} V(\lambda) = B(\lambda) V(\lambda) \end{cases}$$

sind.

Damit erhalten wir aus (2.31) und (2.30)

$$(2.33) \quad \begin{aligned} & A(x) \underline{F_0(x)} \phi'(x) V_0'(x) + F_0'(x) \frac{d}{dx} \phi(x) V_0'(x) - \underline{F_0(x)} \phi(x) \underline{V_0'(x)} B(x) \\ &= A(x) \underline{F_0(x)} \phi(x) V_0'(x) - \underline{F_0(x)} \underline{\phi(x) V_0'(x)} B(x) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(2.34) \quad \frac{d}{dx} \phi(x) = 0 \quad ,$$

so daß $\phi(x)$ eine beliebige Konstantenmatrix C ist. Dann lautet die allgemeine Lösung von (2.30)

$$(2.35) \quad P(x) = F_0'(x) C V_0'(x)$$

Folglich hat die Diff.Gl. (2.30) nicht singuläre Lösungen, so lange die Matrix-Diff.Gl. (2.32)a und b mindestens je eine Hauptmatrix besitzen. Aber wir wissen aus der allgemeinen Theorie solcher Matrix-Diff.Gln., daß dies der Fall ist.

Die Existenz einer Matrix $P(x)$ ist also gesichert.

Im weiteren werden wir diese Matrix als "Übergangsmatrix" bezeichnen. Nun wollen wir folgenden interessanten Hilfssatz beweisen:

Hilfssatz 2-2:

1. Die Determinante

$$(2.36) \quad \Theta(x) = \det P(x)$$

einer Lösung von (2.30) befriedigt die Diff.Gl.

$$(2.37) \quad \frac{d}{dx} \Theta(x) = \{ \operatorname{Sp} (A(x) - B(x)) \} \Theta(x)$$

2. Sei J ein Intervall für x , wo keine der Matrizen $A(x)$ und $B(x)$ eine Singulärstelle besitzt. Dann ist $\Theta(x)$ entweder identisch Null oder zu dem ganzen Intervall J immer verschieden von Null.

Beweis:

1. Seien

$$(2.38) \quad \begin{cases} \det F_0(x) = \Omega(x) \\ \det V_0(x) = \Gamma(x) \\ \det C = \gamma_0 \end{cases}$$

Dann erhalten wir aus (2.35)

$$(2.39) \quad \Theta(x) = \gamma_0 \Omega(x) \Gamma'(x)$$

und entsprechend gilt

$$(2.40) \quad \frac{d}{dz} \Theta(z) = Y_0 \frac{d\Omega(z)}{dz} L'^{-1}(z) - Y_0 \frac{\Omega(z)}{L'^{-1}(z)} \frac{dL'(z)}{dz}$$

Aber aus den Diff.Gln

$$(2.41) \quad \begin{cases} \frac{d\Omega(z)}{dz} = \{Sp(A(z))\} \Omega(z) \\ \frac{dL'(z)}{dz} = \{Sp(B(z))\} L'(z) \end{cases}$$

für $\Omega(z)$ und $L'(z)$ erhalten wir dann (2.37).

2. Aus (2.37) folgt

$$(2.42) \quad \Theta(z) = Y_0 \exp \left\{ \int_{z_0}^z Sp \{ A(t) - B(t) \} dt \right\}$$

Wenn die Funktion $Sp \{ A(z) - B(z) \}$ keine Singulärstelle in J besitzt, dann ist die Funktion $\exp \{ \int \}$ in J nie Null. Ist es aber $\Theta(z) = 0$ in einem Punkt $z = z_1 \in J$, dann muß $Y_0 = 0$ sein und folglich $\Theta(z) \equiv 0$ in J .

Es ist wichtig hier anzumerken, daß die Existenz einer Hauptmatrix $P^{(n)}(z)$ mit der Eigenschaft

$$(2.43) \quad \lim_{q \rightarrow \infty} P^{(n)}(z) = I$$

gleichwertig zu der Aussage ist, daß zu jeder Lösung $\begin{pmatrix} y_1^{(n)}(z) \\ y_2^{(n)}(z) \end{pmatrix}$ des Diff.-Gl.-Systems (2.1) eine Lösung $\begin{pmatrix} v_1^{(n)}(z) \\ v_2^{(n)}(z) \end{pmatrix}$ des Diff.Gl.Systems (2.23) existiert, so daß (2.24) gilt und umgekehrt.

Aus dem Gesagten ist zu entnehmen, daß das reduzierte Diff.Gl.-System eine wichtige Rolle in unserer Theorie spielt. Folglich ist es für uns sehr wichtig, die strenge Lösung dieses Diff.-Gl.-Systems angeben zu können.

3. Strenge Lösung der reduzierten Gleichung

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Lösung des reduzierten Diff. Gl.-Systems (2.23) in allen möglichen Fällen. Da die analytische Struktur der Lösungen in den verschiedenen Quadranten der Parameterebene verschieden ist, haben wir folgende Einteilung dieser Ebene durchgeführt: (s. Abb. 2):

- I) Quadrant $\begin{cases} \mu_1 > 0 \\ \mu_2 > 0 \end{cases}$
- II) Quadrant $\begin{cases} 0 > \mu_1 = -|\mu_1| \\ \mu_2 > 0 \end{cases}$
- III) Quadrant $\begin{cases} 0 > \mu_1 = -|\mu_1| \\ 0 > \mu_2 = -|\mu_2| \end{cases}$
- IV) Quadrant $\begin{cases} \mu_1 > 0 \\ 0 > \mu_2 = -|\mu_2| \end{cases}$
- V) Mittelpunkt $\mu_1 = 0; \mu_2 = 0$

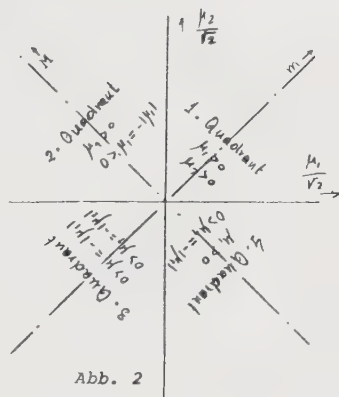


Abb. 2

§ 3.1 Lösung des reduzierten D.Gl.-System im Quadranten $\mu_1 < 0; \mu_2 > 0$

In diesem Quadranten nimmt das reduzierte D.Gl.-System (2.23) die folgende Gestalt an:

$$(3.1) \quad \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} u_1(\tau) \\ u_2(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mu_2 + \frac{\sigma}{2} \\ |\mu_1| + \frac{\sigma}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(\tau) \\ u_2(\tau) \end{pmatrix}$$

$$(3.1) \text{ (a)} \quad \begin{cases} \sigma = \mu_1 - \frac{\alpha}{2} \\ \sigma = \frac{\alpha}{2} - |\mu_1| \\ \tau = \tau + 1 \end{cases}$$

Durch die Transformation:

$$(3.2) \quad \begin{pmatrix} u_1(\tau) \\ u_2(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{|\mu_1|}{\mu_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1(\tau) \\ t_2(\tau) \end{pmatrix}$$

geht (3.1) über in

$$(3.3) \quad \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} t_1(\tau) \\ t_2(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta + \frac{\tau_1}{2} & \frac{\tau_2}{2} \\ -\frac{\tau_2}{2} & -\beta - \frac{\tau_1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1(\tau) \\ t_2(\tau) \end{pmatrix},$$

wobei

$$(3.4) \quad \begin{cases} \beta = \{ |\mu_1| \mu_1 \}^{1/2} \\ \tau_1 = \frac{1}{2} \left[\delta \left\{ \frac{\mu_1}{|\mu_1|} \right\}^{1/2} + \rho \left\{ \frac{\mu_1}{\mu_1} \right\}^{1/2} \right] \\ \tau_2 = \frac{1}{2} \left[\delta \left\{ \frac{\mu_2}{|\mu_1|} \right\}^{1/2} - \rho \left\{ \frac{\mu_1}{\mu_1} \right\}^{1/2} \right] \end{cases}$$

Setzen wir nun voraus, daß $\tau_2 \neq 0$ ist, dann können wir in (3.3) folgende Transformation der unabhängigen Veränderlichen und der Funktionen durchführen

$$(3.5) \quad \xi = \frac{1}{\tau_2} \zeta$$

$$(3.6) \quad \begin{pmatrix} t_1(\zeta) \\ t_2(\zeta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta^{-\tau_1} e^{-1/2 \zeta} & 0 \\ 0 & \zeta^{-\tau_1} e^{-1/2 \zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(\zeta) \\ v_2(\zeta) \end{pmatrix}$$

Dann erhalten wir aus (3.3)

$$(3.7) \quad \frac{d}{d\zeta} \begin{pmatrix} v_1(\zeta) \\ v_2(\zeta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2\tau_1}{\zeta} & \frac{\tau_2}{\zeta} \\ -\frac{\tau_2}{\zeta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(\zeta) \\ v_2(\zeta) \end{pmatrix}$$

oder

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \text{a) } v_1(\zeta) &= -\frac{1}{\tau_2} \zeta \frac{d}{d\zeta} v_2(\zeta) \\ \text{b) } \frac{d^2}{d\zeta^2} v_2(\zeta) + \left\{ -1 + \frac{1-2\tau_1}{\zeta} \right\} \frac{d}{d\zeta} v_2(\zeta) + \frac{\tau_2^2}{\zeta^2} v_2(\zeta) &= 0 \end{aligned}$$

Führen wir noch in (3.8)b) folgende Transformation durch

$$(3.9) \quad v_2(\zeta) = \zeta^{\tau_1-1/2} e^{1/2 \zeta} \omega_2(\zeta)$$

dann erhalten wir schließlich

$$(3.10) \quad \frac{d^2}{d\zeta^2} \omega_2(\zeta) + \left[-1/4 + \frac{1/2 - \tau_1}{\zeta} - \frac{1/4 - \rho^2}{\zeta^2} \right] \omega_2(\zeta) = 0,$$

wobei wir die Beziehung $\tau_1^2 - \tau_2^2 = \rho^2$ benutzt haben.

Die D.Gl. (3.10) ist ein Sonderfall der Whittakerschen D.Gl., deren allgemeine Gestalt [3]

$$(3.11) \quad \frac{d^2}{d\zeta^2} W(\zeta) + \left[-1/4 + \frac{\gamma}{\zeta} + \frac{1/4 - \mu^2}{\zeta^2} \right] W(\zeta)$$

ist. Eine Sonderlösung dieser D.Gl. ist die Whittakersche Funktion $W_{\mu, \gamma}(\zeta)$.

Also lautet eine Lösung der D.Gl. (3.10)

$$(3.12) \quad \omega_{2,1}(\xi) = W_{(\frac{1}{2}-\tau_1), \sqrt{f^2}}(\xi)$$

Aus (3.8)(a), (3.9) und der Beziehung [4]

$$(3.13) \quad \frac{d}{d\xi} \left\{ e^{\frac{1}{2}\xi} \xi^{-\mu} W_{2,1}(\xi) \right\} = (\frac{1}{2} + \mu - \mu)(\frac{1}{2} - \mu - \mu) \xi^{-\mu-1} e^{\frac{1}{2}\xi} W_{2,1}(\xi)$$

erhalten wir

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_{1,1}(\xi) &= -\tau_1 \xi^{\tau_1-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\xi} W_{-(\frac{1}{2}-\tau_1), \sqrt{f^2}}(\xi) \\ \mathcal{L}_{2,1}(\xi) &= \xi^{\tau_1-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\xi} W_{(\frac{1}{2}-\tau_1), \sqrt{f^2}}(\xi) \end{aligned}$$

oder nach (3.6)

$$(3.15) \quad \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{1,1}(\xi) \\ \mathcal{L}_{2,1}(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tau_1 \xi^{-\frac{1}{2}} W_{-(\frac{1}{2}-\tau_1), \sqrt{f^2}}(\xi) \\ \xi^{-\frac{1}{2}} W_{(\frac{1}{2}-\tau_1), \sqrt{f^2}}(\xi) \end{pmatrix}$$

Neben (3.12) sind auch folgende Whittakersche Funktionen Lösungen von (3.10)

$$(3.16) \quad \begin{cases} W_{-(\frac{1}{2}-\tau_1), \sqrt{f^2}}(\xi \cdot e^{i\pi}) \\ W_{-(\frac{1}{2}-\tau_1), \sqrt{f^2}}(\xi \cdot e^{-i\pi}) \end{cases},$$

die so definiert sind [5] :

$$(3.17) \quad W_{-(\frac{1}{2}-\tau_1), \sqrt{f^2}}(\xi \cdot e^{\pm i\pi}) = \frac{\pi}{\sin(2\pi\sqrt{f^2})} \cdot \left\{ \frac{e^{\pm i\pi/2(1-2\sqrt{f^2})}}{\Gamma(1-2\sqrt{f^2})\Gamma(1+\sqrt{f^2}-\tau_1)} M_{(\frac{1}{2}-\tau_1), -\sqrt{f^2}}(\xi) - \frac{e^{\pm i\pi/2(1+2\sqrt{f^2})}}{\Gamma(1+2\sqrt{f^2})\Gamma(1-\sqrt{f^2}-\tau_1)} M_{(\frac{1}{2}-\tau_1), \sqrt{f^2}}(\xi) \right\}$$

$M_{2,1}(\xi)$ ist durch die Reihe

$$(3.18) \quad M_{2,1}(\xi) = e^{-\xi/2} \xi^{\mu+1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu+\frac{1}{2}-\mu)_n}{(1+\frac{1}{2}\mu)_n} \frac{\xi^n}{n!}$$

definiert. Damit wollen wir als von $\omega_{2,1}(\kappa)$ linear unabhängige Lösungen der D.Gl. (3.10) folgende Funktion nehmen:

$$(3.19) \quad \omega_{2,2}(\kappa) = -\frac{\tau_2}{2} \left\{ e^{i\pi(\eta_2-\tau_1)} W_{-(\eta_2-\tau_1), \sqrt{f_2}}(\kappa \cdot e^{i\pi}) + e^{-i\pi(\eta_2-\tau_1)} W_{-(\eta_2-\tau_1), \sqrt{f_2}}(\kappa \cdot e^{-i\pi}) \right\},$$

die wegen (3.17) so definiert ist:

$$(3.20) \quad \omega_{2,2}(\kappa) = \frac{\pi \tau_2}{\sin(\pi \sqrt{f_2})} \left\{ \frac{\cos\left\{\frac{(\tau_1 - \sqrt{f_2})\pi}{2}\right\}}{\Gamma(1-2\sqrt{f_2})\Gamma(1+\sqrt{f_2}-\tau_1)} M_{(\eta_2-\tau_1), -\sqrt{f_2}}(\kappa) - \frac{\cos\left\{\frac{(\tau_1 - \sqrt{f_2})\pi}{2}\right\}}{\Gamma(1+2\sqrt{f_2})\Gamma(1-\sqrt{f_2}-\tau_1)} M_{(\eta_2-\tau_1), \sqrt{f_2}}(\kappa) \right\}$$

Damit erhalten wir aus (3.9) und (3.8)

$$(3.21) \quad x_{2,1}(\kappa) = -\frac{\tau_2}{2} \left\{ e^{i\pi(\eta_2-\tau_1)} \kappa^{\tau_1-1/2} e^{1/2\kappa} W_{-(\eta_2-\tau_1), \sqrt{f_2}}(\kappa \cdot e^{i\pi}) + e^{-i\pi(\eta_2-\tau_1)} \kappa^{\tau_1-1/2} e^{1/2\kappa} W_{-(\eta_2-\tau_1), \sqrt{f_2}}(\kappa \cdot e^{-i\pi}) \right\}$$

und

$$(3.22) \quad x_{2,2}(\kappa) = \frac{1}{2} \kappa \left\{ e^{i\pi(\eta_2-\tau_1)} \frac{d}{d\kappa} \left[\kappa^{\tau_1-1/2} e^{1/2\kappa} W_{-(\eta_2-\tau_1), \sqrt{f_2}}(\kappa \cdot e^{i\pi}) \right] + e^{-i\pi(\eta_2-\tau_1)} \frac{d}{d\kappa} \left[\kappa^{\tau_1-1/2} e^{1/2\kappa} W_{-(\eta_2-\tau_1), \sqrt{f_2}}(\kappa \cdot e^{-i\pi}) \right] \right\}$$

Wegen der Beziehung [6]

$$(3.23) \quad \frac{d}{d\kappa} \left[e^{-\kappa/2} \kappa^{\kappa} W_{\kappa, \mu}(\kappa) \right] = -e^{-\kappa/2} \kappa^{\kappa-1} W_{\kappa+1, \mu}(\kappa)$$

erhalten wir nun

$$(3.24) \quad \frac{d}{d\kappa} \left[\kappa^{\tau_1-1/2} e^{1/2\kappa} W_{(\tau_1-\eta_2), \sqrt{f_2}}(\kappa \cdot e^{\pm i\pi}) \right] = -\kappa^{\tau_1-3/2} e^{1/2\kappa} W_{(\tau_1-\eta_2), \sqrt{f_2}}(\kappa \cdot e^{\pm i\pi})$$

und folglich gilt

$$(3.25) \quad x_{2,2}(\kappa) = -\frac{1}{2} \left\{ e^{i\pi(\eta_2-\tau_1)} \kappa^{\tau_1-1/2} e^{1/2\kappa} W_{(\tau_1-\eta_2), \sqrt{f_2}}(\kappa \cdot e^{i\pi}) + e^{-i\pi(\eta_2-\tau_1)} \kappa^{\tau_1-1/2} e^{1/2\kappa} W_{(\tau_1-\eta_2), \sqrt{f_2}}(\kappa \cdot e^{-i\pi}) \right\}$$

Wir definieren jetzt die Funktion

$$(3.26) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega_{1,2}(\xi) &= -\frac{1}{2} \left\{ e^{i\pi(\eta_2 - \tau_1)} W_{(\tau_1, \eta_2); \sqrt{\beta}}(\xi \cdot e^{i\pi}) + \right. \\ &\quad \left. e^{-i\pi(\eta_2 - \tau_1)} W_{(\tau_1, \eta_2); \sqrt{\beta}}(\xi \cdot e^{-i\pi}) \right\} \end{aligned} \right.$$

oder wegen (3.17)

$$(3.27) \quad \begin{aligned} \omega_{1,2}(\xi) &= \frac{\pi}{i \ln(2\pi\sqrt{\beta})} \left\{ \frac{\cos \frac{1}{2}(\tau_1 + \sqrt{\beta})\pi}{\Gamma^2(1 - 2\sqrt{\beta}) \Gamma^2(\sqrt{\beta} - \tau_1)} M_{-(\tau_1, \eta_2); -\sqrt{\beta}}(\xi) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cos \frac{1}{2}(\tau_1 - \sqrt{\beta})\pi}{\Gamma^2(1 + 2\sqrt{\beta}) \Gamma^2(-\sqrt{\beta} - \tau_1)} M_{-(\tau_1, \eta_2); \sqrt{\beta}}(\xi) \right\} \end{aligned}$$

Wir erhalten aus (3.26), (3.27) und (3.19), (3.20) für $\mathcal{L}_{1,2}^0(\xi)$ und $\mathcal{L}_{2,2}^0(\xi)$ schließlich

$$(3.28) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{L}_{1,2}(\xi) &= \xi^{\tau_1 - 1/2} e^{1/2\xi} \omega_{1,2}(\xi) \\ \mathcal{L}_{2,2}(\xi) &= \xi^{\tau_1 - 1/2} e^{1/2\xi} \omega_{2,2}(\xi) \end{aligned} \right. ,$$

wobei $\omega_{1,2}(\xi)$ bzw. $\omega_{2,2}(\xi)$ in (3.27) bzw. (3.20) angegeben sind. Daraus folgt wegen (3.6), daß

$$(3.29) \quad \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{1,2}(\xi) \\ \mathcal{L}_{2,2}(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^{-1/2} \omega_{1,2}(\xi) \\ \xi^{-1/2} \omega_{2,2}(\xi) \end{pmatrix}$$

eine zu (3.15) linear unabhängige Lösung des D.Gl.Systems (3.3) bildet. Dementsprechend stellt

$$(3.30) \quad V^{(0)}(\xi) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left\{ \frac{1}{\mu_1} \right\}^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\tau_1(2\beta\xi)^{-1/2} W_{(\eta_2, \tau_1); \sqrt{\beta}}(2\beta\xi) & (2\beta\xi)^{-1/2} \omega_{1,2}(2\beta\xi) \\ (2\beta\xi)^{-1/2} W_{(\eta_2, \tau_1); \sqrt{\beta}}(2\beta\xi) & (2\beta\xi)^{-1/2} \omega_{2,2}(2\beta\xi) \end{pmatrix}$$

eine Hauptmatrix der D.Gl.

$$(3.31) \quad \frac{d}{d\xi} V(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & \mu_1 + \frac{\beta}{\xi} \\ |\mu_1| + \frac{\beta}{\xi} & 0 \end{pmatrix} V(\xi) \quad \text{dar}$$

und jede Spalte dieser Matrix ist eine Lösung des D.Gl. Systems (3.1).

Für $\xi = 1$ (also für $\beta = 0$) erhalten wir speziell

$$(3.32) \quad V^{(a)}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left\{ \frac{1}{\mu} \right\} \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\tau_1 (\beta)^{-1/2} W_{-(1/2, \tau_1); \sqrt{2}}(\beta) & (\beta)^{-1/2} \omega_{1,2}(\beta) \\ (\beta)^{-1/2} W_{(1/2, -\tau_1); \sqrt{2}}(\beta) & (\beta)^{-1/2} \omega_{2,1}(\beta) \end{pmatrix}$$

Zunächst wollen wir die asymptotische Struktur bei $\xi \gg 1$ (also $\beta \gg 1$) der Hauptmatrix (3.30) untersuchen.

Zu diesem Zweck benutzen wir die folgende asymptotische Struktur der Whittaker-schen Funktion [7] :

$$(3.33) \quad W_{\chi; \mu}(\xi) \sim e^{-1/2 \xi} \xi^{\chi} {}_2F_0 \left\{ \frac{1}{2} + \mu - \chi; \frac{1}{2} - \mu - \chi; - \frac{1}{\xi} \right\} \\ |a(\xi)| \leq \frac{3\epsilon}{2} - \epsilon \quad (\epsilon > 0 \text{ und beliebig klein})$$

Das Zeichen $\sim$ bedeutet, daß

$$(3.34) \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left\{ W_{\chi; \mu}(\xi) - e^{-1/2 \xi} \xi^{\chi} \sum_{n=0}^N \frac{(\frac{1}{2} + \mu - \chi)_n (\frac{1}{2} - \mu - \chi)_n}{n! (-\xi)^n} \right\} = 0 \\ (\text{für } \forall N = 0, 1, \dots)$$

ist. Dabei muß beachtet werden, daß ${}_2F_0 \left\{ \frac{1}{2} + \mu - \chi; \frac{1}{2} - \mu - \chi; - \frac{1}{\xi} \right\}$ folgendermaßen definiert ist

$$(3.35) \quad {}_2F_0 \left\{ \frac{1}{2} + \mu - \chi; \frac{1}{2} - \mu - \chi; - \frac{1}{\xi} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2} + \mu - \chi)_n (\frac{1}{2} - \mu - \chi)_n}{n! (-\xi)^n}$$

Damit erhalten wir

$$(3.36) \quad W_{-(1/2, \tau_1); \sqrt{2}}(\xi) \sim \xi^{-(1/2, \tau_1)} e^{-1/2 \xi} {}_2F_0 \left(1 + \sqrt{2} \tau_1; 1 - \sqrt{2} \tau_1; - \frac{1}{\xi} \right) \\ W_{(1/2, -\tau_1); \sqrt{2}}(\xi) \sim \xi^{(1/2, -\tau_1)} e^{-1/2 \xi} {}_2F_0 \left(\tau_1 + \sqrt{2}; \tau_1 - \sqrt{2}; - \frac{1}{\xi} \right)$$

und aus (3.15)

$$(3.37) \quad \begin{pmatrix} t_{1,1}(\xi) \\ t_{2,1}(\xi) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\tau_1 \xi^{-\tau_1} e^{-1/2 \xi} \frac{1}{\xi} {}_2F_0 \left\{ 1 + \sqrt{2} \tau_1; 1 - \sqrt{2} \tau_1; - \frac{1}{\xi} \right\} \\ \xi^{-\tau_1} e^{-1/2 \xi} {}_2F_0 \left\{ \tau_1 + \sqrt{2}; \tau_1 - \sqrt{2}; - \frac{1}{\xi} \right\} \end{pmatrix}$$

Ferner erhalten wir aus (3.34)

$$(3.38) \quad W_{-(1/2, \tau_1); \sqrt{2}}(\xi \cdot e^{\pm i\pi}) \sim e^{\pm i\pi(\tau_1 + 1/2)} \xi^{\tau_1 - 1/2} e^{-1/2 \xi} {}_2F_0 \left(1 - \tau_1 - \sqrt{2}; 1 - \tau_1 + \sqrt{2}; - \frac{1}{\xi} \right)$$

und

$$(3.39) \quad W(\tau, 1/\varepsilon); \sqrt{\varepsilon} (\xi_1 - e^{i\pi}) \sim e^{\pm i\pi} (\tau_1 + 1/2) \xi_1^{\tau_1 + 1/2} e^{1/2 \xi_1 F_0} \{ \tau_1 + \sqrt{\varepsilon}; \tau_1 - \sqrt{\varepsilon}; 1/\varepsilon \}$$

Das erlaubt uns die asymptotische Struktur der Funktionen $\omega_{1,2}(\varepsilon)$ und $\omega_{2,1}(\varepsilon)$ in (3.26) bzw. (3.19) zu bestimmen. Es gilt also

$$(3.40) \quad \begin{cases} \omega_{1,2}(\varepsilon) \sim \xi_1^{\tau_1 + 1/2} e^{1/2 \xi_1 F_0} \{ \tau_1 - \sqrt{\varepsilon}; \tau_1 + \sqrt{\varepsilon}; 1/\varepsilon \} \\ \omega_{2,1}(\varepsilon) \sim -\tau_2 \xi_1^{\tau_1 - 1/2} e^{1/2 \xi_1 F_0} \{ 1 + \sqrt{\varepsilon} - \tau_1; 1 - \sqrt{\varepsilon} - \tau_1; 1/\varepsilon \} \end{cases}$$

oder nach (3.19)

$$(3.41) \quad \begin{pmatrix} t_{1,2}(\varepsilon) \\ t_{2,1}(\varepsilon) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \xi_1^{\tau_1} e^{1/2 \xi_1 F_0} \{ \tau_1 - \sqrt{\varepsilon}; \tau_1 + \sqrt{\varepsilon}; 1/\varepsilon \} \\ -\tau_2 \xi_1^{\tau_1} e^{1/2 \xi_1 F_0} \{ 1 + \sqrt{\varepsilon} - \tau_1; 1 - \sqrt{\varepsilon} - \tau_1; 1/\varepsilon \} \end{pmatrix}$$

Dementsprechend erhalten wir für die Hauptmatrix $V^{(n)}(\xi)$ asymptotisch folgendes:

$$(3.42) \quad V^{(n)}(\xi) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \{ \frac{\mu_1}{\mu_2} \}^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\tau_2 \frac{1}{2\beta^2} F_0 \{ 1 + \sqrt{\varepsilon} + \tau_1; 1 - \sqrt{\varepsilon} + \tau_1; -\frac{1}{2\beta^2} \} \\ \tau_2 F_0 \{ \tau_1 + \sqrt{\varepsilon}; \tau_1 - \sqrt{\varepsilon}; -\frac{1}{2\beta^2} \} \\ \tau_2 F_0 \{ \tau_1 - \sqrt{\varepsilon}; \tau_1 + \sqrt{\varepsilon}; -\frac{1}{2\beta^2} \} \\ -\tau_2 \frac{1}{2\beta^2} F_0 \{ 1 + \sqrt{\varepsilon} - \tau_1; 1 - \sqrt{\varepsilon} - \tau_1; \frac{1}{2\beta^2} \} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (2\beta^2)^{-\tau_1} e^{-\beta^2} & 0 \\ 0 & (2\beta^2)^{\tau_1} e^{\beta^2} \end{pmatrix}$$

Diese Gleichung läßt sich auch folgendermaßen schreiben:

$$(3.43) \quad V^{(n)}(\xi) \sim \left(\sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(n)}(\mu_1, \mu_2) (2\beta^2)^{-n} \right) (2\beta^2)^{\tau_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{\beta^2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xi,$$

wobei

$$(3.44) \quad V_0^{(n)}(\mu_1, \mu_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\{ \frac{\mu_1}{\mu_2} \}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2}} & \{ \frac{\mu_1}{\mu_2} \}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$(3.45) \quad V_n^{(n)}(\mu_1, \mu_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \{ \frac{\mu_1}{\mu_2} \}^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau_2 \frac{(1 + \sqrt{\varepsilon} + \tau_1)_{n-1} (1 - \sqrt{\varepsilon} + \tau_1)_{n-1}}{(n-1)!} (-1)^n & \frac{(\tau_1 - \sqrt{\varepsilon})_n (\tau_1 + \sqrt{\varepsilon})_n}{n!} \\ (\tau_1 - \sqrt{\varepsilon})_n (\tau_1 + \sqrt{\varepsilon})_n (-1)^n & -\tau_2 \frac{(1 + \sqrt{\varepsilon} - \tau_1)_{n-1} (1 - \sqrt{\varepsilon} - \tau_1)_{n-1}}{(n-1)!} \end{pmatrix}$$

sind.

Es ist hier wichtig zu bemerken, daß $V_0^{(\infty)}(\mu_1; \mu_2)$ für kein Paar $(\mu_1; \mu_2)$ aus dem betrachteten Quadranten singulär sein kann, d.h. $\det V_0^{(\infty)}(\mu_1; \mu_2) \neq 0$ für alle betrachteten $\mu_1; \mu_2$.

Wir betrachten jetzt den Fall $\gamma_2 = 0$ (d.h. $\gamma_2 = \sqrt{s}$)

Dann sind alle $V_n^{(\infty)}(\mu_1; \mu_2)$ für $n \geq 1$ identisch Null und wir erhalten in diesem Fall formal

$$(3.46) \quad V_0^{(\infty)}(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\left\{\frac{\mu_1}{\mu_2}\right\}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} & \left\{\frac{\mu_1}{\mu_2}\right\}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Man kann zeigen, daß dies eine strenge Lösung der D.Gl. (3.1) für den Fall $\gamma_2 = 0$ ist.

§ 3.2 Lösung im Quadranten $\mu_1 > 0 : \mu_2 < 0$

In diesem Fall nimmt (2.23) folgende Gestalt an:

$$(3.47) \quad \frac{d}{d\xi} \begin{pmatrix} u_1(\xi) \\ u_2(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -|\mu_1| + \frac{\sigma}{2} \\ -\mu_1 + \frac{\sigma}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(\xi) \\ u_2(\xi) \end{pmatrix},$$

wobei

$$(3.48) \quad \begin{cases} \sigma = -(|\mu_1| + \frac{\sigma}{2}) \\ \tau = (\frac{\sigma}{2} + \mu_1) \\ \xi = \xi + 1 \end{cases}$$

sind.

Durch die Transformation

$$(3.49) \quad \begin{pmatrix} v_1(\xi) \\ v_2(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left\{\frac{\mu_1}{\mu_2}\right\}^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \tau_1 e^{-\frac{1}{2}\xi} & 0 \\ 0 & \xi \tau_2 e^{-\frac{1}{2}\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1(\xi) \\ r_2(\xi) \end{pmatrix}$$

$\xi = \frac{1}{2\beta} \xi$

mit

$$(3.50) \quad \begin{cases} \beta = \left\{\frac{\mu_1}{\mu_2}\right\}^{\frac{1}{2}} \\ \tau_1 = \frac{1}{2} \left[\delta \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{\frac{1}{2}} + \sigma \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ \tau_2 = \frac{1}{2} \left[\delta \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{\frac{1}{2}} - \sigma \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \end{cases}$$

geht (3.47) in folgendes D.Gl.-System über

$$(3.51) \quad \frac{d}{d\zeta} \begin{pmatrix} p_1(\zeta) \\ p_2(\zeta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\tau_2}{\zeta} \\ -\frac{\tau_2}{\zeta} & 1 - \frac{2\tau_1}{\zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(\zeta) \\ p_2(\zeta) \end{pmatrix}$$

Daraus folgt nun

$$(3.52) \quad \begin{cases} (a) & p_2(\zeta) = \frac{1}{\zeta} \zeta_1 \frac{d}{d\zeta} p_1(\zeta) \\ (b) & \frac{d^2}{d\zeta^2} p_1(\zeta) + \left(-1 + \frac{1+2\tau_1}{\zeta}\right) \frac{d}{d\zeta} p_1(\zeta) + \frac{\tau_2^2}{\zeta^2} p_1(\zeta) = 0 \end{cases}$$

Durch die Transformation

$$(3.53) \quad p_1(\zeta) = \zeta^{-1/2 + \tau_1} e^{1/2 \zeta} \omega_1(\zeta)$$

geht (3.52)(b) über in folgende D.Gl.

$$(3.54) \quad \frac{d^2}{d\zeta^2} \omega_1(\zeta) + \left\{ -1/4 + \frac{1/2 + \tau_1}{\zeta} + \frac{1/4 - \tau_1^2}{\zeta^2} \right\} \omega_1(\zeta) = 0$$

Wir haben auch hier die Beziehung $\tau_1^2 - \tau_2^2 = \tau_1^2$ benutzt. Diese ist eine Whittaker-sche D.Gl. (s. (3.11)), wobei

$$(3.56) \quad \begin{cases} \kappa = 1/2 + \tau_1 \\ \mu = \sqrt{\tau_1^2} = i \sqrt{\tau_1^2} \end{cases}$$

sind. Damit lautet eine Lösung von (3.54)

$$(3.57) \quad \omega_{1,1}(\zeta) = W_{(1/2, \tau_1)}(\zeta) \sqrt{\tau_1^2}(\zeta)$$

Folglich erhalten wir nach (3.53)

$$(3.58) \quad p_{1,1}(\zeta) = \zeta^{-1/2 + \tau_1} e^{1/2 \zeta} W_{(1/2, \tau_1)}(\zeta) \sqrt{\tau_1^2}(\zeta)$$

Wegen der Beziehung (s. Referenz [4])

$$(3.59) \quad \frac{d}{d\zeta} \left[e^{1/2 \zeta} \zeta^{-\kappa} W_{\kappa, \mu}(\zeta) \right] = (1/2 + \mu - \kappa)(1/2 - \mu - \kappa) \zeta^{-\kappa-1} e^{1/2 \zeta} W_{\kappa-1, \mu}(\zeta)$$

erhalten wir

$$(3.60) \quad p_{1,1}(\zeta) = \tau_2 \zeta^{-1/2 + \tau_1} e^{1/2 \zeta} W_{(-1/2 + \tau_1)}(\zeta) \sqrt{\tau_1^2}(\zeta).$$

Wegen (3.49) erhalten wir schließlich

$$(3.61) \quad \begin{pmatrix} w_{1,1}(z) \\ w_{2,1}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\nu_1}{\sqrt{1-\nu_1^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{-1/2} W_{(\nu_1+\tau_1)}; \sqrt{1-\nu_1^2}(z) \\ \tau_1 z^{-1/2} W_{(-\nu_1+\tau_1)}; \sqrt{1-\nu_1^2}(z) \end{pmatrix}$$

Mit (3.57) sind auch folgende Whittakersche Funktionen Lösungen von (3.43)

$$(3.62) \quad \begin{cases} W_{-(\nu_1+\tau_1)}; \sqrt{1-\nu_1^2}(z \cdot e^{i\pi}) \\ W_{-(\nu_1+\tau_1)}; \sqrt{1-\nu_1^2}(z \cdot e^{-i\pi}) \end{cases}$$

Diese sind definiert durch

$$(3.63) \quad W_{-(\nu_1+\tau_1)}; \sqrt{1-\nu_1^2}(z \cdot e^{\pm i\pi}) = \frac{\pi}{2i\pi(\nu_1+\tau_1)} \left\{ \frac{e^{\pm i\pi/2} (1-2\sqrt{1-\nu_1^2})}{\Gamma(1-2\sqrt{1-\nu_1^2}) \Gamma(1+\sqrt{1-\nu_1^2}+\tau_1)} M_{(\nu_1+\tau_1)}; -\sqrt{1-\nu_1^2}(z) - \frac{e^{\pm i\pi/2} (1+2\sqrt{1-\nu_1^2})}{\Gamma(1+2\sqrt{1-\nu_1^2}) \Gamma(1-\sqrt{1-\nu_1^2}+\tau_1)} M_{(\nu_1+\tau_1)}; \sqrt{1-\nu_1^2}(z) \right\}$$

Nun wollen wir folgende Gleichung als eine zu (3.57) linear unabhängige Lösung der D.Gl. (3.54) betrachten:

$$(3.64) \quad w_{1,2}(z) = \frac{\tau_1}{2} \left\{ e^{i\pi(\nu_1+\tau_1)} W_{-(\nu_1+\tau_1)}; \sqrt{1-\nu_1^2}(z \cdot e^{i\pi}) + e^{-i\pi(\nu_1+\tau_1)} W_{-(\nu_1+\tau_1)}; \sqrt{1-\nu_1^2}(z \cdot e^{-i\pi}) \right\}$$

Damit lautet $r_{1,2}(z)$ wegen (3.53) bzw. $r_{2,1}(z)$ wegen (3.52) (a) folgendermaßen

$$(3.65) \quad \begin{cases} r_{1,2}(z) = \tau_1/2 \left\{ e^{i\pi(\nu_1+\tau_1)} z^{-(\nu_1+\tau_1)} e^{1/2\pi} W_{-(\nu_1+\tau_1)}; \sqrt{1-\nu_1^2}(z \cdot e^{i\pi}) \right. \\ \left. + e^{-i\pi(\nu_1+\tau_1)} z^{-(\nu_1+\tau_1)} e^{1/2\pi} W_{-(\nu_1+\tau_1)}; \sqrt{1-\nu_1^2}(z \cdot e^{-i\pi}) \right\} \end{cases}$$

$$(3.66) \quad \begin{cases} r_{2,2}(z) = 1/2 z \left\{ e^{i\pi(\nu_1+\tau_1)} \frac{d}{dz} [z^{-(\nu_1+\tau_1)} e^{1/2\pi} W_{-(\nu_1+\tau_1)}; \sqrt{1-\nu_1^2}(z \cdot e^{i\pi})] \right. \\ \left. + e^{-i\pi(\nu_1+\tau_1)} z^{-(\nu_1+\tau_1)} e^{1/2\pi} W_{-(\nu_1+\tau_1)}; \sqrt{1-\nu_1^2}(z \cdot e^{-i\pi}) \right\} \end{cases}$$

Aus der Beziehung (s. Referenz [6])

erhalten wir

$$(3.67) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dz} [z^{-(\nu_1+\tau_1)} e^{1/2\pi} W_{-(\nu_1+\tau_1)}; \sqrt{1-\nu_1^2}(z \cdot e^{\pm i\pi})] = \\ = z^{-(\nu_1+\tau_1)} e^{1/2\pi} W_{-(\nu_1+\tau_1)}; \sqrt{1-\nu_1^2}(z \cdot e^{\pm i\pi}) \end{aligned}$$

Aus (3.66) und (3.67) erhalten wir

$$(3.68) \quad p_{2,2}(\xi) = -\frac{1}{2} \left\{ e^{i\pi(\frac{1}{2}+\tau_1)} \xi^{-(\frac{1}{2}+\tau_1)} e^{\frac{1}{2}\pi} W_{(\frac{1}{2}-\tau_1); \sqrt{f_2}}(\xi, e^{i\pi}) \right. \\ \left. + e^{-i\pi(\frac{1}{2}+\tau_1)} \xi^{-(\frac{1}{2}+\tau_1)} e^{\frac{1}{2}\pi} W_{(\frac{1}{2}-\tau_1); \sqrt{f_2}}(\xi, e^{-i\pi}) \right\}$$

Nun definieren wir die Funktion

$$(3.69) \quad \omega_{2,2}(\xi) = -\frac{1}{2} \left\{ e^{i\pi(\frac{1}{2}+\tau_1)} W_{(\frac{1}{2}-\tau_1); \sqrt{f_2}}(\xi, e^{i\pi}) + e^{-i\pi(\frac{1}{2}+\tau_1)} W_{(\frac{1}{2}-\tau_1); \sqrt{f_2}}(\xi, e^{-i\pi}) \right\}$$

also

$$(3.70) \quad \omega_{2,2}(\xi) = \frac{\pi}{\sin(2\pi\sqrt{f_2})} \left\{ \frac{\cos(\tau_1 - \sqrt{f_2})}{\Gamma'(1-2\sqrt{f_2}) \Gamma'(\tau_1 + \sqrt{f_2})} M_{(\tau_1 - \frac{1}{2}); -\sqrt{f_2}}(\xi) - \frac{\cos(\tau_1 + \sqrt{f_2})}{\Gamma'(1+2\sqrt{f_2}) \Gamma'(\tau_1 - \sqrt{f_2})} M_{(\tau_1 - \frac{1}{2}); \sqrt{f_2}}(\xi) \right\}$$

Damit erhalten wir für $p_{2,2}(\xi)$ und $p_{2,1}(\xi)$ schließlich

$$(3.71) \quad \begin{cases} p_{2,2}(\xi) = \xi^{-(\frac{1}{2}+\tau_1)} e^{\frac{1}{2}\pi} \omega_{2,2}(\xi) \\ p_{2,1}(\xi) = \xi^{-(\frac{1}{2}+\tau_1)} e^{\frac{1}{2}\pi} \omega_{2,1}(\xi) \end{cases}$$

wobei $\omega_{2,1}(\xi)$ und $\omega_{2,2}(\xi)$ in (3.64) bzw. (3.69) angegeben sind.

Wegen (3.40) lautet also eine zu (3.61) linear unabhängige Lösung von (3.47)

$$(3.72) \quad (a) \quad \begin{pmatrix} v_{2,2}(\xi) \\ v_{2,1}(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left\{ \frac{\mu_1}{|\mu_1|} \right\}^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^{-\frac{1}{2}} \omega_{2,1}(\xi) \\ \xi^{-\frac{1}{2}} \omega_{2,2}(\xi) \end{pmatrix}$$

Dann sehen wir aus (3.61) und (3.72)(a), daß die Matrix

$$(3.72) \quad (b) \quad V^{(2)}(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left\{ \frac{\mu_1}{|\mu_1|} \right\}^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

$$\cdot \begin{pmatrix} (2\beta\xi)^{-\frac{1}{2}} W_{(\frac{1}{2}+\tau_1); \sqrt{f_2}}(2\beta\xi) & (2\beta\xi)^{-\frac{1}{2}} \omega_{2,2}(2\beta\xi) \\ \xi^{-\frac{1}{2}} (2\beta\xi)^{-\frac{1}{2}} W_{(\frac{1}{2}+\tau_1); \sqrt{f_2}}(2\beta\xi) & \xi^{-\frac{1}{2}} \omega_{2,2}(2\beta\xi) \end{pmatrix}$$

eine Hauptmatrix der folgenden D.Gl. bildet

$$(3.73) \quad \frac{d}{dz} V\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1/\mu_1 + \frac{\delta}{\varepsilon} \\ -1/\mu_1 + \frac{\delta}{\varepsilon} & 0 \end{pmatrix} V\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)$$

Insbesondere für $\frac{z}{\varepsilon} = 1$ (also für $z = 0$) erhalten wir aus (3.72) (b)

$$(3.74) \quad V^{(1)}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left\{ \frac{\mu_1}{\mu_2} \right\}^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\nu_1} & \frac{1}{\nu_2} \\ \frac{1}{\nu_2} & -\frac{1}{\nu_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (2\beta)^{-1/2} W_{(1/2, \tau_1)}; \sqrt{f_2}(2\beta) & (2\beta)^{-1/2} \omega_{1, \tau}(2\beta) \\ \tau_2 (2\beta)^{-1/2} W_{(-1/2, \tau_1)}; \sqrt{f_2}(2\beta) & (2\beta)^{-1/2} \omega_{2, \tau}(2\beta) \end{pmatrix}$$

Nun wollen wir die asymptotische Struktur bei $\frac{z}{\varepsilon} \gg 1$ (also $z \gg 1$) der Hauptmatrix (3.72) (b) untersuchen. Dann erhalten wir aus (3.33)

$$(3.75) \quad \begin{cases} W_{(1/2, \tau_1)}; \sqrt{f_2}\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) \sim \frac{z}{\varepsilon}^{(1/2 + \tau_1)} e^{-1/2 \frac{z}{\varepsilon} F_0} \left\{ \tau_1 - \sqrt{f_2}; \tau_1 + \sqrt{f_2}; -1/\frac{z}{\varepsilon} \right\} \\ W_{(-1/2, \tau_1)}; \sqrt{f_2}\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) \sim \frac{z}{\varepsilon}^{(-1/2 + \tau_1)} e^{-1/2 \frac{z}{\varepsilon} F_0} \left\{ 1 - \tau_1 + \sqrt{f_2}; 1 - \tau_1 - \sqrt{f_2}; -1/\frac{z}{\varepsilon} \right\} \end{cases}$$

Damit haben wir aus (3.61)

$$(3.76) \quad \begin{pmatrix} v_{2,1}\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) \\ v_{2,2}\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left\{ \frac{\mu_1}{\mu_2} \right\}^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\nu_1} & \frac{1}{\nu_2} \\ \frac{1}{\nu_2} & -\frac{1}{\nu_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (2\beta \frac{z}{\varepsilon}) \tau_1 e^{-\beta \frac{z}{\varepsilon} F_0} \left\{ \tau_1 - \sqrt{f_2}; \tau_1 + \sqrt{f_2}; -\frac{1}{2\beta \frac{z}{\varepsilon}} \right\} \\ \tau_2 (2\beta \frac{z}{\varepsilon}) \tau_1 e^{-\beta \frac{z}{\varepsilon} F_0} \left\{ 1 - \tau_1 - \sqrt{f_2}; 1 - \tau_1 - \sqrt{f_2}; -\frac{1}{2\beta \frac{z}{\varepsilon}} \right\} \end{pmatrix}$$

Ferner erhalten wir aus (3.33) auch

$$(3.77) \quad W_{(-1/2, \tau_1)}; \sqrt{f_2}\left(\frac{z}{\varepsilon} \cdot e^{\pm i\pi}\right) \sim e^{\mp i\pi(1/2 + \tau_1)} \frac{z}{\varepsilon}^{-(1/2 + \tau_1)} e^{1/2 \frac{z}{\varepsilon} F_0} \left\{ 1 + \tau_1 + \sqrt{f_2}; 1 + \tau_1 - \sqrt{f_2}; 1/\frac{z}{\varepsilon} \right\}$$

und

$$(3.78) \quad W_{(1/2, \tau_1)}; \sqrt{f_2}\left(\frac{z}{\varepsilon} \cdot e^{\pm i\pi}\right) \sim e^{\pm i\pi(1/2 - \tau_1)} \frac{z}{\varepsilon}^{(1/2 - \tau_1)} e^{1/2 \frac{z}{\varepsilon} F_0} \left\{ \tau_1 + \sqrt{f_2}; \tau_1 - \sqrt{f_2}; 1/\frac{z}{\varepsilon} \right\}$$

Damit erhalten wir aus (3.64) bzw. (3.69)

$$(3.79) \quad \begin{cases} \omega_{2,1}\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) \sim \tau_2 \frac{z}{\varepsilon}^{-(1/2 + \tau_1)} e^{1/2 \frac{z}{\varepsilon} F_0} \left\{ 1 + \tau_1 + \sqrt{f_2}; 1 + \tau_1 - \sqrt{f_2}; 1/\frac{z}{\varepsilon} \right\} \\ \omega_{2,2}\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) \sim \frac{z}{\varepsilon}^{(1/2 - \tau_1)} e^{1/2 \frac{z}{\varepsilon} F_0} \left\{ \tau_1 - \sqrt{f_2}; \tau_1 - \sqrt{f_2}; 1/\frac{z}{\varepsilon} \right\} \end{cases}$$

Aus (3.72)(a) folgt also

$$(3.80) \quad \left\{ \begin{aligned} \begin{pmatrix} v_{1,2}(\frac{1}{2}) \\ v_{2,1}(\frac{1}{2}) \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \{\frac{\mu_1}{|\mu_1|}\} \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &\cdot \begin{pmatrix} (\gamma_1 (2\beta\frac{1}{2})^{-\gamma_1-1} e^{\beta\frac{1}{2}} \gamma_1 F_0 \{ 1+\tau_1+\sqrt{\gamma_1^2}; 1+\tau_1-\sqrt{\gamma_1^2}; \frac{1}{2\beta\frac{1}{2}} \}) \\ (2\beta\frac{1}{2})^{-\gamma_2} e^{\beta\frac{1}{2}} \gamma_2 F_0 \{ \gamma_2+\sqrt{\gamma_2^2}; \gamma_2-\sqrt{\gamma_2^2}; \frac{1}{2\beta\frac{1}{2}} \}) \end{pmatrix} \end{aligned} \right.$$

Dementsprechend erhalten wir für die Hauptmatrix $V^{(a)}(\frac{1}{2})$ asymptotisch folgendes:

$$(3.81) \quad V^{(a)}(\frac{1}{2}) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \{\frac{\mu_1}{|\mu_1|}\} \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 F_0 \{ \gamma_1-\sqrt{\gamma_1^2}; \gamma_1+\sqrt{\gamma_1^2}; \frac{1}{2\beta\frac{1}{2}} \} & \gamma_2 \frac{1}{2\beta\frac{1}{2}} F_0 \{ 1+\tau_1+\sqrt{\gamma_1^2}; 1+\tau_1-\sqrt{\gamma_1^2}; \frac{1}{2\beta\frac{1}{2}} \} \\ \gamma_1 \frac{1}{2\beta\frac{1}{2}} F_0 \{ 1-\tau_1+\sqrt{\gamma_1^2}; 1-\tau_1-\sqrt{\gamma_1^2}; \frac{1}{2\beta\frac{1}{2}} \} & \gamma_2 F_0 \{ \gamma_2+\sqrt{\gamma_2^2}; \gamma_2-\sqrt{\gamma_2^2}; \frac{1}{2\beta\frac{1}{2}} \} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (2\beta\frac{1}{2})^{\gamma_1} e^{-\beta\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & (2\beta\frac{1}{2})^{\gamma_2} e^{-\beta\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

Dies läßt sich auch folgendermaßen schreiben

$$(3.82) \quad V^{(a)}(\frac{1}{2}) \sim \left(\sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(a)}(\mu_1; |\mu_1|) (2\beta\frac{1}{2})^{-n} \right) (2\beta\frac{1}{2})^{\gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} e^{\beta\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2},$$

wobei

$$(3.83) \quad V_0^{(a)}(\mu_1; |\mu_1|) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \{\frac{\mu_1}{|\mu_1|}\} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \{\frac{\mu_1}{|\mu_1|}\} \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{für } n=0)$$

$$(3.84) \quad V_n^{(a)}(\mu_1; |\mu_1|) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \{\frac{\mu_1}{|\mu_1|}\} \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{(\gamma_1-\sqrt{\gamma_1^2})_n (\gamma_1+\sqrt{\gamma_1^2})_{n-1}}{n!} (-1)^n & \gamma_1 \frac{(1+\tau_1+\sqrt{\gamma_1^2})_{n-1} (1+\tau_1-\sqrt{\gamma_1^2})_n}{(n-1)!} \\ \gamma_1 \frac{(1-\tau_1+\sqrt{\gamma_1^2})_{n-1} (1-\tau_1-\sqrt{\gamma_1^2})_n}{(n-1)!} (-1)^{n-1} & \frac{(\gamma_2-\sqrt{\gamma_2^2})_n (\gamma_2+\sqrt{\gamma_2^2})_{n-1}}{n!} \end{pmatrix}$$

sind.

Es ist hier wichtig zu bemerken, daß $V_0^{(a)}(\mu_1; |\mu_1|)$ für kein betrachtetes Paar $(\mu_1; \mu_2)$ eine singuläre Matrix sein kann, d.h. $\det V_0^{(a)}(\mu_1; |\mu_1|) \neq 0$ für jedes betrachtete Paar.

§ 3.3 Lösung des reduzierten D.Gl. Systems in dem Quadranten $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0$

und $\mu_1 < 0, \mu_2 < 0$

Durch die Transformation

$$(3.85) \quad \begin{pmatrix} v_1(\xi) \\ v_2(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \frac{|\mu_1|}{|\mu_2|} \end{pmatrix}^{1/2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-1/2 \xi} \xi^{-\tau_1} & 0 \\ 0 & e^{1/2 \xi} \xi^{-\tau_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(\xi) \\ x_2(\xi) \end{pmatrix}$$

$$\xi = \frac{1}{2\beta} x$$

mit

$$(3.86) \quad \begin{cases} \beta = i \left\{ \mu_1 \cdot \mu_2 \right\}^{1/2} \\ \tau_1 = \frac{i}{2} \left[\vartheta \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^{1/2} - \left\{ \frac{\mu_2}{\mu_1} \right\}^{1/2} \delta \right] \\ \tau_2 = -\frac{i}{2} \left[\vartheta \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^{1/2} + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{1/2} \delta \right] \\ \vartheta = \mu_2 - \frac{\alpha}{2} \\ \delta = \frac{\alpha}{2} + \mu_1 \end{cases}$$

für $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0$

bzw. mit

$$(3.87) \quad \begin{cases} \beta = -i \left\{ |\mu_1| |\mu_2| \right\}^{1/2} \\ \tau_1 = \frac{i}{2} \left[\vartheta \left(\frac{|\mu_1|}{|\mu_2|} \right)^{1/2} - \left(\frac{|\mu_2|}{|\mu_1|} \right)^{1/2} \delta \right] \\ \tau_2 = -\frac{i}{2} \left[\vartheta \left(\frac{|\mu_1|}{|\mu_2|} \right)^{1/2} + \left(\frac{|\mu_2|}{|\mu_1|} \right)^{1/2} \delta \right] \\ \vartheta = -(|\mu_1| + \frac{\alpha}{2}) \\ \delta = \frac{\alpha}{2} - |\mu_1| \end{cases}$$

für $\mu_1 < 0, \mu_2 < 0$

geht das reduzierte D.Gl. System (2.23) über in folgendes

$$(3.88) \quad \frac{d}{d\xi} \begin{pmatrix} x_1(\xi) \\ x_2(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\tau_1}{\xi} & \frac{\tau_2}{\xi} \\ -\frac{\tau_2}{\xi} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(\xi) \\ x_2(\xi) \end{pmatrix}$$

Wenn wir nun (3.88) mit (3.7) vergleichen, sehen wir, daß zwei linear unabhängige Lösungen von (3.88) folgendermaßen lauten: Für $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0$ gilt

$$(3.89) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} y_{1,1}(\xi) \\ y_{2,1}(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tau_2 \xi^{\tau_1-1/2} e^{1/2 \xi} W_{-(1/2+\tau_1)}(\sqrt{\xi}) \\ \xi^{\tau_1-1/2} e^{1/2 \xi} W_{(1/2-\tau_1)}(\sqrt{\xi}) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_{1,2}(\xi) \\ y_{2,2}(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-i\pi(1/2-\tau_1)} \xi^{\tau_1-1/2} e^{1/2 \xi} W_{(\tau_1+1/2)}(\sqrt{\xi}) \\ -\tau_2 e^{-i\pi(1/2-\tau_1)} \xi^{\tau_1-1/2} e^{1/2 \xi} W_{-(1/2-\tau_1)}(\sqrt{\xi}) \end{pmatrix} \\ \xi = 2|\beta| \xi \cdot e^{i\pi/2} \end{array} \right.$$

und für $\mu_1 < 0, \mu_2 < 0$ gilt

$$(3.90) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} y_{1,1}(\xi) \\ y_{2,1}(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tau_2 \xi^{\tau_1-1/2} e^{1/2 \xi} W_{-(1/2+\tau_1)}(\sqrt{\xi}) \\ \xi^{\tau_1-1/2} e^{1/2 \xi} W_{(1/2-\tau_1)}(\sqrt{\xi}) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_{1,2}(\xi) \\ y_{2,2}(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{i\pi(1/2-\tau_1)} \xi^{\tau_1-1/2} e^{1/2 \xi} W_{(1/2+\tau_1)}(\sqrt{\xi}) \\ -\tau_2 e^{i\pi(1/2-\tau_1)} \xi^{\tau_1-1/2} e^{1/2 \xi} W_{-(1/2-\tau_1)}(\sqrt{\xi}) \end{pmatrix} \\ \xi = 2|\beta| \xi \cdot e^{-i\pi/2} \end{array} \right.$$

Aus (3.85) erhalten wir dann, daß

$$(3.91) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} y_{1,1}(\xi) \\ y_{2,1}(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \left\{ \frac{\mu_1}{\mu_2} \right\}^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\tau_2 \xi^{\tau_1-1/2} W_{-(1/2+\tau_1)}(\sqrt{\xi}) \\ \xi^{\tau_1-1/2} W_{(1/2-\tau_1)}(\sqrt{\xi}) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_{1,2}(\xi) \\ y_{2,2}(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \left\{ \frac{\mu_1}{\mu_2} \right\}^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{-i\pi(1/2-\tau_1)} \xi^{\tau_1-1/2} W_{(\tau_1+1/2)}(\sqrt{\xi}) \\ -\tau_2 e^{-i\pi(1/2-\tau_1)} \xi^{\tau_1-1/2} W_{-(1/2-\tau_1)}(\sqrt{\xi}) \end{pmatrix} \\ \xi = 2|\beta| \xi \cdot e^{i\pi/2} \end{array} \right.$$

für $\mu > 0, \mu_1 > 0$

zwei linear unabhängige Lösungen des reduzierten D.Gl.Systems (3.2) sind.

Ähnlicherweise sind

$$(3.92) \quad \left\{ \begin{aligned} \begin{pmatrix} v_{1,1}(\xi) \\ v_{2,1}(\xi) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \left\{ \frac{\mu_1}{|\mu_1|} \right\} \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\tau_2 \xi^{-1/2} W_{-(\nu_2+\tau_1)}; \sqrt{f_2}(\xi) \\ \xi^{-1/2} W_{(\nu_2-\tau_1)}; \sqrt{f_2}(\xi) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} v_{1,2}(\xi) \\ v_{2,2}(\xi) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \left\{ \frac{\mu_1}{|\mu_1|} \right\} \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{i\pi(\nu_2-\tau_1)} \xi^{-1/2} W_{(\nu_2+\tau_1)}; \sqrt{f_2}(\xi \cdot e^{i\pi}) \\ -\tau_2 e^{i\pi(\nu_2-\tau_1)} \xi^{-1/2} W_{-(\nu_2-\tau_1)}; \sqrt{f_2}(\xi \cdot e^{i\pi}) \end{pmatrix} \\ \xi &= 2|\beta| \xi \cdot e^{-i\pi/2} \end{aligned} \right.$$

für $\mu_1 < 0, \mu_2 < 0$ zwei linear unabhängige Lösungen des reduzierten D.Gl.Systems (2.23).

Wie vorher bildet die Matrix

$$(3.93) \quad \left\{ \begin{aligned} V^{(10)}(\xi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \left\{ \frac{\mu_1}{|\mu_1|} \right\} \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \\ &\cdot \begin{pmatrix} -\tau_2 \xi^{-1/2} W_{-(\nu_2+\tau_1)}; \sqrt{f_2}(\xi) & -e^{-i\pi(\nu_2-\tau_1)} \xi^{-1/2} W_{(\nu_2+\tau_1)}; \sqrt{f_2}(\xi \cdot e^{i\pi}) \\ \xi^{-1/2} W_{(\nu_2-\tau_1)}; \sqrt{f_2}(\xi) & -\tau_2 e^{i\pi(\nu_2-\tau_1)} \xi^{-1/2} W_{-(\nu_2-\tau_1)}; \sqrt{f_2}(\xi \cdot e^{i\pi}) \end{pmatrix} \\ \xi &= 2|\beta| \xi \cdot e^{i\pi/2} \end{aligned} \right.$$

für $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0$ bzw. die Matrix

$$(3.94) \quad \left\{ \begin{aligned} V^{(10)}(\xi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \left\{ \frac{\mu_1}{|\mu_1|} \right\} \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \\ &\cdot \begin{pmatrix} -\tau_2 \xi^{-1/2} W_{-(\nu_2+\tau_1)}; \sqrt{f_2}(\xi) & -e^{+i\pi(\nu_2-\tau_1)} \xi^{-1/2} W_{(\nu_2+\tau_1)}; \sqrt{f_2}(\xi \cdot e^{i\pi}) \\ \xi^{-1/2} W_{(\nu_2-\tau_1)}; \sqrt{f_2}(\xi) & -\tau_2 e^{i\pi(\nu_2-\tau_1)} \xi^{-1/2} W_{-(\nu_2-\tau_1)}; \sqrt{f_2}(\xi \cdot e^{i\pi}) \end{pmatrix} \\ \xi &= 2|\beta| \xi \cdot e^{-i\pi/2} \end{aligned} \right.$$

für $\mu_1 < 0, \mu_2 < 0$ eine Hauptmatrix der Matrix-D.Gl.

$$(3.95) \quad \frac{d}{d\xi} V(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & \mu_2 + \frac{9}{\xi} \\ -\mu_1 + \frac{9}{\xi} & 0 \end{pmatrix} V(\xi)$$

Nun wollen wir die asymptotische Struktur dieser Lösungen untersuchen, wenn

$\xi \gg 1$ (d.h. $z \gg 1$) ist.

Aus (3.36) und (3.38), (3.39) erhalten wir

$$(3.96) \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} v_{1,1}(\xi) \\ v_{2,1}(\xi) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{1}{\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\tau_2 \xi^{-1} F_0 \{ 1 + \sqrt{15} + \tau_1, 1 - \sqrt{15} + \tau_1, -\frac{1}{\xi} \} \cdot \xi^{-\tau_1} e^{-\frac{1}{2}\xi} \\ {}_2F_0 \{ \tau_1 + \sqrt{15}, \tau_1 - \sqrt{15}, -\frac{1}{\xi} \} \cdot \xi^{-\tau_1} e^{-\frac{1}{2}\xi} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} v_{1,2}(\xi) \\ v_{2,2}(\xi) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{1}{\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_2F_0 \{ \tau_1 + \sqrt{15}, \tau_1 - \sqrt{15}, \frac{1}{\xi} \} \cdot \xi^{-\tau_1} e^{\frac{1}{2}\xi} \\ -\tau_2 \xi^{-1} {}_2F_0 \{ 1 + \sqrt{15} - \tau_1, 1 - \sqrt{15} - \tau_1, \frac{1}{\xi} \} \cdot \xi^{-\tau_1} e^{\frac{1}{2}\xi} \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\xi = z/|\beta| \xi \cdot e^{i\pi/2}$$

für $\mu_1 > 0; \mu_2 > 0$

und

$$(3.97) \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} v_{1,1}(\xi) \\ v_{2,1}(\xi) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{1}{\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\tau_2 \xi^{-1} F_0 \{ 1 + \sqrt{15} + \tau_1, 1 - \sqrt{15} + \tau_1, -\frac{1}{\xi} \} \cdot \xi^{-\tau_1} e^{-\frac{1}{2}\xi} \\ {}_2F_0 \{ \tau_1 + \sqrt{15}, \tau_1 - \sqrt{15}, -\frac{1}{\xi} \} \cdot \xi^{-\tau_1} e^{-\frac{1}{2}\xi} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} v_{1,2}(\xi) \\ v_{2,2}(\xi) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{1}{\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_2F_0 \{ \tau_1 + \sqrt{15}, \tau_1 - \sqrt{15}, \frac{1}{\xi} \} \cdot \xi^{-\tau_1} e^{\frac{1}{2}\xi} \\ -\tau_2 \xi^{-1} {}_2F_0 \{ 1 + \sqrt{15} - \tau_1, 1 - \sqrt{15} - \tau_1, \frac{1}{\xi} \} \cdot \xi^{-\tau_1} e^{\frac{1}{2}\xi} \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\xi = z/|\beta| \xi \cdot e^{-i\pi/2}$$

für $\mu_1 < 0; \mu_2 < 0$

Daraus folgt für $\mu_1 > 0; \mu_2 > 0$

$$(3.98) \quad \begin{cases} V^{(00)}(\xi) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{1}{\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \\ \begin{pmatrix} \tau_2 \frac{i}{z/|\beta| \xi} {}_2F_0 \{ 1 + \sqrt{15} + \tau_1, 1 - \sqrt{15} + \tau_1, \frac{i}{z/|\beta| \xi} \} \cdot {}_2F_0 \{ \tau_1 - \sqrt{15}, \tau_1 - \sqrt{15}, -\frac{i}{z/|\beta| \xi} \} \\ {}_2F_0 \{ \tau_1 + \sqrt{15}, \tau_1 - \sqrt{15}, \frac{i}{z/|\beta| \xi} \} \cdot \tau_2 \frac{i}{z/|\beta| \xi} {}_2F_0 \{ 1 + \sqrt{15} - \tau_1, 1 - \sqrt{15} - \tau_1, -\frac{i}{z/|\beta| \xi} \} \end{pmatrix} \cdot \\ \begin{pmatrix} (v_{1,1}(\xi))^{-1} e^{-i\pi/2} & 0 \\ 0 & (v_{2,1}(\xi))^{-1} e^{i\pi/2} \end{pmatrix} \end{cases}$$

und für $\mu_1 < 0, \mu_2 < 0$

$$(3.99) \quad \left\{ \begin{aligned} V^{(\infty)}(\xi) &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \left\{ \frac{\mu_1}{\mu_2} \right\}^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &\cdot \begin{pmatrix} -\tau_2 \frac{i}{2|\beta|^{1/2}} F_0 \left\{ 1+\sqrt{\beta} + \tau_1; 1-\sqrt{\beta} + \tau_1; -\frac{i}{2|\beta|^{1/2}} \right\} & F_0 \left\{ \tau_1 + \sqrt{\beta}; \tau_1 - \sqrt{\beta}; \frac{i}{2|\beta|^{1/2}} \right\} \\ 2 F_0 \left\{ \tau_1 + \sqrt{\beta}; \tau_1 - \sqrt{\beta}; -\frac{i}{2|\beta|^{1/2}} \right\} & -\tau_2 \frac{i}{2|\beta|^{1/2}} F_0 \left\{ 1-\tau_1 - \sqrt{\beta}; 1-\tau_1 - \sqrt{\beta}; \frac{i}{2|\beta|^{1/2}} \right\} \end{pmatrix} \\ &\cdot \begin{pmatrix} (-2i|\beta|^{1/2})^{-\tau_1} e^{+i|\beta|^{1/2}} & 0 \\ 0 & (-2i|\beta|^{1/2})^{\tau_1} e^{-i|\beta|^{1/2}} \end{pmatrix} \end{aligned} \right.$$

Dies läßt sich auch folgendermaßen schreiben: Für $\mu_1 > 0; \mu_2 > 0$ gilt

$$(3.100) \quad V^{(\infty)}(\xi) \sim \left(\sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(\infty)}(\mu_1, \mu_2) (2i|\beta|^{1/2})^{-n} \right) (2i|\beta|^{1/2})^{\tau_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{i|\beta|^{1/2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xi,$$

mit

$$V_0^{(\infty)}(\mu_1, \mu_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -i \left\{ \frac{\mu_1}{\mu_2} \right\}^{1/2} & i \left\{ \frac{\mu_1}{\mu_2} \right\}^{1/2} \end{pmatrix} \quad (\text{für } n=0)$$

$$(3.101) \quad V_n^{(\infty)}(\mu_1, \mu_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \left\{ \frac{\mu_1}{\mu_2} \right\}^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\tau_2 (1+\sqrt{\beta} + \tau_1)_{n-1} (1-\sqrt{\beta} + \tau_1)_{n-1}}{(n-1)!} (-1)^n & \frac{(\tau_2 - \sqrt{\beta})_n (\tau_1 + \sqrt{\beta})_n}{n!} \\ \frac{(\tau_1 - \sqrt{\beta})_n (\tau_2 + \sqrt{\beta})_n}{n!} (-1)^n & -\frac{\tau_2 (1+\sqrt{\beta} - \tau_1)_{n-1} (1-\sqrt{\beta} - \tau_1)_{n-1}}{(n-1)!} \end{pmatrix} \quad (\text{für } n > 0)$$

und für $\mu_1 < 0; \mu_2 < 0$ gilt

$$(3.102) \quad \bar{V}^{(\infty)}(\xi) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(\infty)}(|\mu_1|, |\mu_2|) (-2i|\beta|^{1/2})^{-n} \right) (-2i|\beta|^{1/2})^{\tau_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{i|\beta|^{1/2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \xi,$$

wobei $V_0^{(\infty)}(|\mu_1|, |\mu_2|)$ ($n=0$) und $V_n^{(\infty)}(|\mu_1|, |\mu_2|)$ ($n \geq 1$) in (3.101) (mit $\beta_1; \tau_1, \dots$ in (3.87)) angegeben sind.

Es ist hier wichtig zu beachten, daß (3.102) det $V_0^{(\infty)}(\mu_1, \mu_2)$ bzw. det $V_0^{(\infty)}(|\mu_1|, |\mu_2|)$ für jedes Paar $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0$ bzw. $\mu_1 < 0, \mu_2 < 0$ nicht verschwindet.

4. Geschlossen lösbare Fälle

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Lösung des Grund-D.Gl.Systems (2.1) für diejenigen Paare (μ_1, μ_2) , für die eine geschlossene Integration einfacher als die Lösung im allgemeinen Fall ist.

Zu diesem Zweck sehen wir, daß in (2.1) für $k=1$ und $\mu_1 = -\frac{\alpha}{2}$ bzw. für $k=1$ die Singulärstelle $z = -1$ bzw. $z=0$ verschwindet. Ebenfalls sehen wir aus (2.3), daß für $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$ sich die wesentliche Singulärstelle bei $z = \infty$ in eine außerwesentliche transformiert. Dementsprechend sind (im Hinblick auf eine einfachere geschlossene Integration) drei Sonderfälle von Interesse:

- | $k = 1$ | $k = 1$ | $k = \text{beliebig}$ |
|--------------------------------|------------------------------|-----------------------|
| 1. $\mu_1 = -\frac{\alpha}{2}$ | 2. $\mu_1 = \text{beliebig}$ | 3. $\mu_1 = 0$ |
| $\mu_2 = \text{beliebig}$ | $\mu_2 = \alpha/2$ | $\mu_2 = 0$ |

§ 4.1) Der Fall $\begin{cases} k=1 \\ \mu_1 = -\alpha/2 \\ \mu_2 = \text{beliebig} \end{cases}$; Lösungen der Eigenwertaufgabe

In diesem Fall läßt sich das Grund-

D.Gl.System (2.1) so schreiben:

$$(4.1) \quad \begin{cases} \frac{df_1}{dz} = \{\mu_2 + \frac{\alpha}{2}\} f_2 \\ \frac{df_2}{dz} = \frac{\alpha}{2} f_1 \end{cases}$$

mit

$$(4.2) \quad \varphi := \mu_2 + \frac{\alpha}{2}$$

Hier sind drei verschiedene Fälle zu unterscheiden (s. Abb. 4-1)

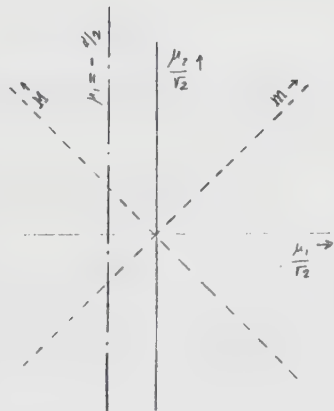
1. Sei $\mu_2 > 0$.

Dann folgt aus (4.1)

$$(4.3) \quad \frac{d^2}{dz^2} f_2(z) + \left\{ -\frac{1}{4} + \frac{\frac{\alpha}{2}(-\alpha\varphi)}{z^2} \right\} f_2(z) = 0$$

mit

$$(4.4)(a) \quad \xi = \sqrt{-\alpha\mu_2} \quad z = \beta z$$



(Abb. 4-1)

(4.3) ist eine Whittakersche D.Gl. (s. (3.11)) mit

$$(4.4) \quad (b) \quad \begin{cases} \kappa = \frac{1}{2}\beta(-\alpha\beta) \\ \mu = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Folglich sind zwei linear unabhängige Lösungen von (4.3)

$$(4.5) \quad \begin{cases} f_{2,1}(\xi) = W_{\frac{1}{2}\beta(-\alpha\beta); \frac{1}{2}}(\xi) \\ f_{2,2}(\xi) = W_{\frac{1}{2}\beta(\alpha\beta); \frac{1}{2}}(\xi \cdot e^{i\pi}) \end{cases}$$

Aus (4.2), (4.4)(a), (b) und (4.5) folgt

$$(4.6) \quad \begin{cases} f_{1,1}(\xi) = \frac{2\beta}{\alpha} \frac{d}{d\xi} W_{\frac{1}{2}\beta(-\alpha\beta); \frac{1}{2}}(\xi) \\ f_{1,2}(\xi) = \frac{2\beta}{\alpha} \frac{d}{d\xi} W_{\frac{1}{2}\beta(\alpha\beta); \frac{1}{2}}(\xi \cdot e^{i\pi}) \end{cases}$$

Also sind zwei linear unabhängige Lösungen des D.Gl. Systems (4.1)

$$(4.7) \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} f_{1,1}(\xi) \\ f_{2,1}(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\beta}{\alpha} \frac{d}{d\xi} W_{\frac{1}{2}\beta(-\alpha\beta); \frac{1}{2}}(\xi) \\ W_{\frac{1}{2}\beta(-\alpha\beta); \frac{1}{2}}(\xi) \end{pmatrix} & (a) \\ \begin{pmatrix} f_{1,2}(\xi) \\ f_{2,2}(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\beta}{\alpha} \frac{d}{d\xi} W_{\frac{1}{2}\beta(\alpha\beta); \frac{1}{2}}(\xi \cdot e^{i\pi}) \\ W_{\frac{1}{2}\beta(\alpha\beta); \frac{1}{2}}(\xi \cdot e^{i\pi}) \end{pmatrix} & (b) \end{cases}$$

Aus der allgemeinen Theorie für die Whittakerschen Funktionen [8] kann man sehen, daß genau für

$$(4.8) \quad -\frac{1}{2\beta}(\alpha\beta) = n+1 \quad (n = 0, 1, \dots)$$

die Lösung (4.7)(a) die Randbedingungen sowohl in $\xi = 0$ als auch in $\xi = \infty$ erfüllt, d.h. daß

$$(4.9) \quad \int_0^{\infty} \left(\frac{\xi}{2+1} \right) \left\{ \left| f_{1,1}(\xi) \right|^2 + \left(\frac{2+1}{2} \right)^2 \left| f_{2,1}(\xi) \right|^2 \right\} d\xi < \infty$$

mit $\xi = \sqrt{2\alpha\mu}$, 2 gilt.

Die Lösung (4.7)(b) kommt wegen ihres exponentiell ansteigenden Verhaltens bei $\xi = \infty$ nicht in Frage.

In diesem Fall liefert uns also die Gleichung (4.8) die möglichen Eigenwerte.

Es ist interessant zu bemerken, daß die Whittakersche Funktion $W_{-\frac{1}{2}\beta}(\alpha\xi); \frac{1}{2}(\xi)$ sich zu einer elementaren Funktion reduziert, wenn (4.8) gilt. Wir erhalten [9]

$$(4.10) \quad W_{n+1; \frac{1}{2}}(\xi) = (-1)^n \cdot n! \cdot \xi \cdot e^{-\xi/2} L_n^{(1)}(\xi),$$

$$(n=0, 1, 2, \dots)$$

wobei $L_n^{(\sigma)}(\xi)$ das zugeordnete Laguerresche Polynom ist, dessen Definition lautet:

$$(4.11) \quad L_n^{(\sigma)}(\xi) = \frac{\Gamma(n+\sigma+1)}{(n!)^2} F_1 \left\{ -n; 1+\sigma; \xi \right\} = \sum_{\nu=0}^n \binom{n+\sigma}{n-\nu} \frac{(-\xi)^\nu}{\nu!}.$$

Nun gilt

$$(4.12) \quad \frac{d}{d\xi} \left\{ \xi \cdot e^{-\xi/2} L_n^{(1)}(\xi) \right\} = e^{-\xi/2} \left\{ (n+1) L_n^{(0)}(\xi) - \frac{1}{2} \xi L_n^{(1)}(\xi) \right\}$$

und folglich

$$(4.13) \quad 2\beta/\alpha \frac{d}{d\xi} W_{-1/2\beta}(\alpha\xi); \frac{1}{2}(\xi) = 2\beta/\alpha (-1)^n n! e^{-\xi/2} \left\{ (n+1) L_n^{(0)}(\xi) - \frac{1}{2} \xi L_n^{(1)}(\xi) \right\}.$$

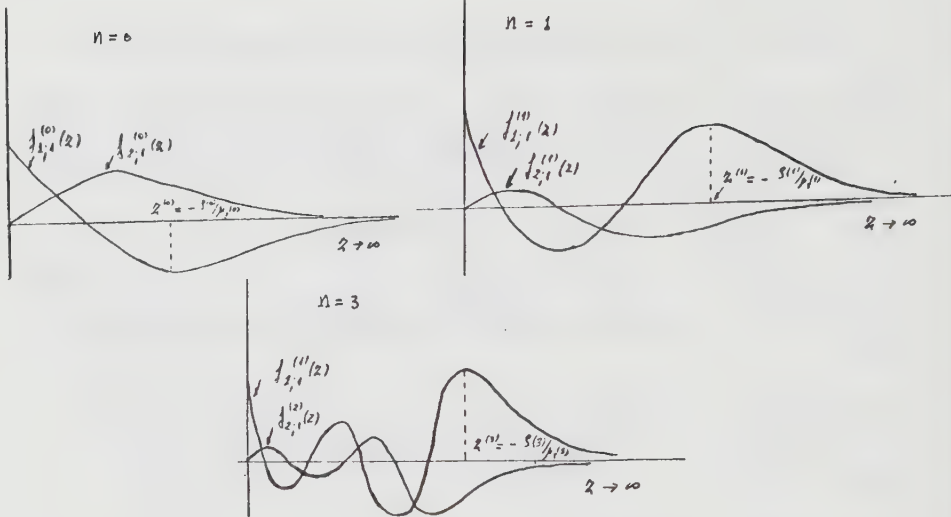
Wir können also diese Ergebnisse folgendermaßen zusammenfassen: Die Funktionen (4.7) (a), (b) sind im allgemeinen zwei linear unabhängige Lösungen des D.Gl.-Systems (4.1). Für die Werte $\mu_1^{(n)}$, die (4.8) lösen, erhalten wir folgende Eigenfunktionen

$$(4.14) \quad \begin{pmatrix} f_{1;1}^{(n)}(\xi) \\ f_{2;1}^{(n)}(\xi) \end{pmatrix} = (-1)^n n! e^{-\xi/2} \begin{pmatrix} \xi L_n^{(1)}(\xi) \\ \frac{2\beta/\alpha}{\xi} (n+1) L_n^{(0)}(\xi) - \frac{1}{2} \xi L_n^{(1)}(\xi) \end{pmatrix}$$

mit

$$(4.15) \quad \xi_1 = \sqrt{2\alpha \mu_1^{(n)}} \xi = \beta_n \xi$$

In der (Abb. 4-2) ist der Verlauf der Funktionen $f_{1;1}^{(n)}(\xi); f_{2;1}^{(n)}(\xi)$ für $n = 0, 1, 2$ dargestellt



(Abb. 4-2)

Lösung der Eigenwertgleichung (4.8)

Wegen (4.4) (a), (b) und (4.2) läßt sich (4.8) auch so schreiben:

$$(4.16) \quad \left(\frac{\alpha}{2} \mu_1\right) + z(n+1) \left(\frac{\alpha}{2} \mu_2\right)^{1/2} - \frac{\alpha^2}{4} = 0$$

Daraus folgt

$$(4.17) \quad \left(\frac{\alpha}{2} \mu_1\right)^{1/2} = -(n+1) + \sqrt{(n+1)^2 + \frac{\alpha^2}{4}}$$

Die Wurzel $\left(\frac{\alpha}{2} \mu_2\right)^{1/2} = -(n+1) - \sqrt{(n+1)^2 + \frac{\alpha^2}{4}}$ kommt nicht in Frage, denn muß positiv sein.

Wir erhalten schließlich

$$(4.18) \quad \begin{cases} \mu_2^{(n)} = \frac{2}{\alpha} \left\{ -(n+1) + \sqrt{(n+1)^2 + \frac{\alpha^2}{4}} \right\}^2 \\ \mu_1^{(n)} = -\frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

als Eigenwerte.

Die entsprechenden Eigenwerte der Parameter M und m sind wegen (1.3) folgendermaßen gegeben:

$$(4.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_n = \frac{\alpha}{4} + \frac{1}{\alpha} (n+1)^2 \left\{ -1 + \left(1 + \frac{\alpha^2}{4(n+1)^2} \right)^{1/2} \right\}^2 \\ m_n = -\frac{\alpha}{4} + \frac{1}{\alpha} (n+1)^2 \left\{ -1 + \left(1 + \frac{\alpha^2}{4(n+1)^2} \right)^{1/2} \right\}^2 \end{array} \right.$$

(Diese Eigenwerte wurden durch ein anderes Verfahren auch von Lutzenberger gerechnet). Wegen der Kleinheit von α können wir eine gute Näherung für M_n und m_n angeben

$$(4.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_n \approx \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha^3}{64(n+1)^2} + O(\alpha^5) \\ m_n \approx -\frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha^3}{64(n+1)^2} + O(\alpha^5) \end{array} \right.$$

Für $\mu_2^{(n)}$ erhalten wir mit gleicher Genauigkeit

$$(4.21) \quad \mu_2^{(n)} \approx \frac{\alpha^3}{32(n+1)^2} + O(\alpha^5)$$

Es ist sehr wichtig darauf zu achten, daß M_n bzw. m_n den Häufigkeitspunkt $\alpha/4$ bzw. $-\alpha/4$ besitzen (der Häufigkeitspunkt für $\mu_2^{(n)}$ ist 0), d.h.

$$(4.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \alpha/4 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} m_n = -\alpha/4 \end{array} \right. \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_2^{(n)} = 0 \right)$$

Doch gehören diese Häufigkeitspunkte nicht zu dem Spektrum.

Das ist eine Eigentümlichkeit der Eigenwertaufgabe unseres Grund-D.Gl.-System (2.1), die auch im allgemeinen Fall gilt.

Das können wir in unserem Fall relativ einfach nachprüfen.

2. Seit $\mu_2 = 0$ (d.h. $M = \alpha/4$; $m = -\alpha/4$). Dann läßt sich (4.1)

$$(4.23(a)) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{df_1}{dz} = -\frac{\alpha}{2z} f_2 \\ \frac{df_2}{dz} = \frac{\alpha}{2} f_1 \end{array} \right.$$

Daraus folgt

$$(4.23(b)) \quad \frac{d^2}{dz^2} f_1 + \frac{\alpha^2}{4z^2} f_1 = 0$$

Die Lösungen von (4.23)(b) können wir erhalten, indem wir die D.Gl. (4.23)(b) mit der folgenden vergleichen:

$$\frac{d^2}{dz^2} \tilde{f}_{1/2} + c^2 z^{2q-2} \tilde{f}_{1/2} = 0$$

deren Lösungen [10]

$$(4.31) \quad Y_n(\xi) = 2/\pi [\gamma + \ell \frac{1}{2} \xi] J_n(\xi) - \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(\frac{1}{2} \xi)^{2r+n}}{r!} \frac{(n-r-1)!}{(n-r-1)!} - \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(\frac{1}{2} \xi)^{n+2r}}{r! (n+r)!} (k_{r+n} + k_r),$$

$$k_\ell = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{\ell} \quad ; \quad (\ell = 1, 2, \dots) \quad ; \quad k_0 = 0$$

sind, bilden ein Hauptsystem der D.Gl. (4.23) (a).

Wir erhalten für die Komponenten der Lösung (4.29) (a), die die Randbedingung erfüllt, die asymptotische Darstellung [12]

$$(4.32) \quad \left\{ \begin{aligned} f_{1,1}(z) &\sim \left(\frac{2}{\pi \xi}\right)^{1/2} \left\{ \cos\left(\xi - \pi/4\right) \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(n, 2r)}{(2\xi)^{2r}} \right. \\ &\quad \left. - \sin\left(\xi - \pi/4\right) \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(n, 2r+1)}{(2\xi)^{2r+1}} \right\} \\ f_{2,1}(z) &\sim \frac{\xi}{\alpha} \left(\frac{2}{\pi \xi}\right)^{1/2} \left\{ \sin\left(\xi - \frac{3\pi}{4}\right) \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(n, 2r)}{(2\xi)^{2r}} \right. \\ &\quad \left. + \cos\left(\xi - \frac{3\pi}{4}\right) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (n, 2r+1)}{(2\xi)^{2r+1}} \right\} \\ \xi &= \alpha \sqrt{z} \quad , \quad z \rightarrow \infty \end{aligned} \right.$$

mit

$$(4.33) \quad (n, r) = (-1)^r \frac{(\frac{1}{2} - n)_r (\frac{1}{2} + n)_r}{r!}$$

Damit ist es klar, daß das Integral (4.9) wegen des Verhaltens von $f_{1,1}(z)$ und $f_{2,1}(z)$ für große Werte von z nicht mehr beschränkt bleiben kann; d.h. $\mu_2 = 0$ ($M = \alpha/4, m = -\alpha/4$) ist kein Eigenwert.

3. Sei $0 > \mu_2 = -|\mu_2|$

Dann folgt aus (4.1)

$$(4.34) \quad \frac{d^2}{dz^2} f_1(z) + \left\{ -\frac{1}{4} + \frac{-\frac{1}{2}\beta(\alpha|\beta|)}{\xi} \right\} f_1(\xi) = 0$$

mit

$$(4.35) \quad \left\{ \begin{aligned} |\beta| &= |\mu_2| + \alpha/2 \\ i\xi &= i\sqrt{z}|\mu_2| \quad z = i\beta z \end{aligned} \right.$$

(4.34) ist eine Whittakersche D.Gl. (3. (3.11)) mit

$$(4.36) \quad \begin{cases} \mathcal{K} = -i/2\beta (\kappa/\rho) = -i\tau \\ \mu = 1/2 \end{cases}$$

In diesem Fall sind zwei linear unabhängige Lösungen von (4.34)

$$(4.37) \quad \begin{cases} f_{2,1}(\kappa) = -i M_{-i\tau; 1/2}(i\kappa) \\ f_{2,2}(\kappa) = W_{-i\tau; 1/2}(i\kappa) \end{cases}$$

Damit erhalten wir aus (4.1)

$$(4.38) \quad \begin{cases} f_{1,1}(z) = z\beta/\kappa \frac{d}{d\kappa} \{-i M_{-i\tau; 1/2}(i\kappa)\} \\ f_{1,2}(z) = z\beta/\kappa \frac{d}{d\kappa} \{W_{-i\tau; 1/2}(i\kappa)\} \end{cases}$$

Wir können diese Ergebnisse zusammenfassen:

Wenn $\mu_2 < 0$ ist, dann sind

$$(4.39) \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} f_{1,1}(z) \\ f_{2,1}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z\beta/\kappa \frac{d}{d\kappa} \{-i M_{-i\tau; 1/2}(i\kappa)\} \\ -i M_{-i\tau; 1/2}(i\kappa) \end{pmatrix} & (a) \\ \begin{pmatrix} f_{1,2}(z) \\ f_{2,2}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z\beta/\kappa \frac{d}{d\kappa} \{W_{-i\tau; 1/2}(i\kappa)\} \\ W_{-i\tau; 1/2}(i\kappa) \end{pmatrix} & (b) \end{cases}$$

mit $\zeta = \sqrt{z\beta/\kappa} z$; $\tau = \frac{\alpha}{2\beta} \rho$ zwei linear unabhängige Lösungen des D.Gl.Systems (4.1).

Die Funktion $-i M_{-i\tau; 1/2}(i\kappa)$ ist so definiert [13]

$$(4.40) \quad -i M_{-i\tau; 1/2}(i\kappa) = \zeta \sum \frac{(-1)^r}{(r+1)!} \cdot \frac{\zeta^r}{\prod_{s=1}^r \cos \varphi_s} \cdot \cos \left(\zeta/2 + \frac{r\pi}{2} + \sum_{s=1}^r \varphi_s \right)$$

$$\varphi_s = \arctan \left\{ -\tau/s \right\}$$

$$\text{mit } \cos \varphi_s = \left\{ 1 + \tau^2/s^2 \right\}^{1/2}$$

$$\prod_{s=1}^r \cos \varphi_s = 1 \quad \text{und} \quad \sum_{s=1}^r \varphi_s = 0 \quad \text{für} \quad r=0.$$

In (4.39) erfüllt nur die Lösung (a) die Randbedingung bei $z = 0$.

Nach (1.5) ist

$$(4.41) \quad \int_0^{\infty} \frac{z+1}{z} \left| f_{z,1}(z) \right|^2 dz = \infty$$

hinreichend um zu beweisen, daß kein Eigenwert vorliegt.

Wir sehen aus der asymptotischen Darstellung der Funktion $M_{-i\tau; 1/2}(i\eta)$ [14] :

$$(4.42) \quad M_{-i\tau; 1/2}(i\eta) \sim \frac{e^{-(\tau-i)\pi/2}}{|\Gamma(1-i\tau)|} \cdot \left\{ \cos(\tau \ln|\eta| + 1/2 \eta + \delta - \pi/2) \cdot \sum_{r=0}^N \frac{\tau^{2r}}{\eta^r r!} \cdot \frac{\cos\left[\sum_{s=1}^r (\varphi_s^{(r)} + \varphi_s^{(-)} - \pi r/2)\right]}{\prod_{s=1}^r (\sin \varphi_s^{(r)}, \sin \varphi_s^{(-)})} \right. \\ \left. - \sin(\tau \ln|\eta| + 1/2 \eta + \delta - \pi/2) \cdot \sum_{r=0}^N \frac{\tau^{2r}}{\eta^r r!} \cdot \frac{\sin\left[\sum_{s=1}^r (\varphi_s^{(r)} + \varphi_s^{(-)} - \pi r/2)\right]}{\prod_{s=1}^r (\sin \varphi_s^{(r)}, \sin \varphi_s^{(-)})} \right\}$$

mit

$$\Gamma(1-i\tau) = |\Gamma(1-i\tau)| e^{-i\delta}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_s^{(\pm)} = \frac{-\tau}{s + \frac{-1 \pm 1}{2}}$$

daß (4.41) für $\mu_1 < 0$ immer erfüllt ist.

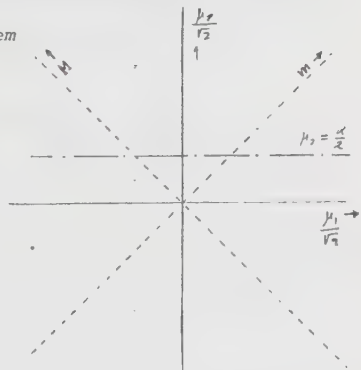
§ 4.2 Der Fall $\begin{cases} k=1 \\ \mu_1 = \text{beliebig} \\ \mu_2 = \eta/2 \end{cases}$ Ausschuß von Eigenwerten

In diesem Fall läßt sich das Grund-D.Gl. System (2.2) so schreiben

$$(4.43) \quad \begin{cases} \frac{d}{d\eta} f_1(\eta) = \alpha/2 f_2(\eta) \\ \frac{d}{d\eta} f_2(\eta) = (-\mu_1 + \frac{\delta}{\eta}) f_1(\eta) \end{cases}$$

mit

$$(4.44) \quad \begin{cases} \delta = \frac{\alpha}{2} + \mu_1 \\ \eta = z+1 \end{cases}$$



Hier sind auch drei verschiedene Fälle zu unterscheiden (s. Abb. 4-3)).

(Abb. 4-3)

1. $\mu_1 > 0$. Dann folgt aus (4.43)

$$(4.45) \quad \frac{d^2}{dx^2} f_1(x) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{i(\tau/2\beta)\delta}{x} \right) f_1(x) = 0$$

mit $i x = i \sqrt{2\alpha\mu_1} \frac{x}{\beta} = i \beta \xi$

(4.45) ist eine Whittakersche D.Gl. (s. (3.12)) mit

$$(4.46) \quad \begin{cases} \tau = i \frac{1}{2\beta} (\alpha\delta) = i \tau \\ \mu = 1/2 \end{cases}$$

Dann lauten zwei linear unabhängige Lösungen von (4.45)

$$(4.47) \quad \begin{cases} f_{1,1}(x) = W_{i\tau, 1/2} \{ e^{i\eta/2}, x \} \\ f_{1,2}(x) = W_{-i\tau, 1/2} \{ e^{-i\eta/2}, x \} \end{cases}$$

Diese sind zueinander komplex konjugiert. Damit erhalten wir aus (4.43)

$$(4.48) \quad \begin{cases} f_{2,1}(x) = \tau\beta/\alpha \frac{d}{dx} [W_{i\tau, 1/2} \{ e^{i\eta/2}, x \}] \\ f_{2,2}(x) = \tau\beta/\alpha \frac{d}{dx} [W_{-i\tau, 1/2} \{ e^{-i\eta/2}, x \}] \end{cases}$$

Wir können diese Ergebnisse folgendermaßen zusammenfassen:

$$(4.49) \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} f_{1,1}(x) \\ f_{2,1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{i\tau, 1/2} \{ e^{i\eta/2}, x \} \\ \tau\beta/\alpha \frac{d}{dx} W_{i\tau, 1/2} \{ e^{i\eta/2}, x \} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} f_{1,2}(x) \\ f_{2,2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{-i\tau, 1/2} \{ e^{-i\eta/2}, x \} \\ \tau\beta/\alpha \frac{d}{dx} W_{-i\tau, 1/2} \{ e^{-i\eta/2}, x \} \end{pmatrix} \end{cases}$$

mit $x = \beta \xi$; $\tau = 1/2\beta (\alpha\delta)$; $\beta = \sqrt{2\alpha\mu_1}$

sind für $\mu_1 > 0$ zwei linear unabhängige Lösungen des D.Gl. Systems (4.43).

Da der Punkt $\xi = 1$ (also $z = 0$) eine Regulärstelle des D.Gl. Systems ist, gibt es Konstanten Y_1 und Y_2 , so daß

$$(4.50) \quad Y_1 \left. \begin{matrix} f_{1,1}(\xi) \\ f_{2,1}(\xi) \end{matrix} \right|_{\xi=1} + Y_2 \left. \begin{matrix} f_{1,2}(\xi) \\ f_{2,2}(\xi) \end{matrix} \right|_{\xi=1} = 0$$

gilt. Folglich erfüllt die Lösung

$$(4.51) \quad \begin{pmatrix} f_1(\bar{z}) \\ f_2(\bar{z}) \end{pmatrix} = Y_1 \begin{pmatrix} f_{1,1}(\bar{z}) \\ f_{2,1}(\bar{z}) \end{pmatrix} + Y_2 \begin{pmatrix} f_{1,2}(\bar{z}) \\ f_{2,2}(\bar{z}) \end{pmatrix}$$

die Randbedingung bei $\bar{z} = 1$ ($\lambda = 0$).

Aus der asymptotischen Entwicklung für die Whittakersche Funktion (s. (3.33))

$$(4.52) \quad W_{\pm i\tau, 1/2}(e^{\pm i\pi/2} \xi) \sim e^{-\pi/2 \tau} e^{\mp i \{ \xi/2 - \tau \ln \xi \}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 \mp i\tau)_n (\mp i\tau)_n}{n! (\pm i\xi)^n}$$

kann man unmittelbar erkennen, daß das Integral (1.6) in diesem Fall nicht beschränkt ist. Es gibt also keinen Eigenwert, so lange $\mu_1 > 0$ sei.

2. Seit $0 > \mu_1 = -|\mu_1|$. Dann erhalten wir aus (4.43)

$$(4.53) \quad \frac{d^2}{d\xi^2} f_1(\xi) + \left\{ -\frac{1}{4} + \frac{-\frac{1}{2\beta}(\alpha\delta)}{\xi} \right\} f_1(\xi) = 0$$

mit $\xi = \sqrt{2\alpha|\mu_1|} \xi = \beta \xi$

(4.53) ist eine Whittakersche D.Gl. (s. (3.11)) mit

$$(4.54) \quad \begin{cases} \kappa = -\frac{1}{2\beta}(\alpha\delta) = -\tau \\ \mu = 1/2 \end{cases}$$

Damit lauten zwei linear unabhängige Lösungen von (4.53)

$$(4.55) \quad \begin{cases} f_{1,1}(\xi) = W_{-\tau, 1/2}(\xi) \\ f_{1,2}(\xi) = W_{\tau, 1/2}(e^{i\pi} \xi) \end{cases}$$

Aus (4.43) erhalten wir

$$(4.56) \quad \begin{cases} f_{2,1}(\xi) = 2\beta/\alpha \frac{d}{d\xi} W_{-\tau, 1/2}(\xi) \\ f_{2,2}(\xi) = 2\beta/\alpha \frac{d}{d\xi} W_{\tau, 1/2}(\xi) \end{cases}$$

Wir können diese Ergebnisse folgendermaßen zusammenfassen:

Für $\mu_1 < 0$ sind

$$(4.57) \quad \begin{pmatrix} f_{1,1}(\xi) \\ f_{2,1}(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{-\tau, 1/2}(\xi) \\ 2\beta/\alpha \frac{d}{d\xi} W_{-\tau, 1/2}(\xi) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{1,2}(\xi) \\ f_{2,2}(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{\tau, 1/2}(\xi \cdot e^{i\pi}) \\ 2\beta/\alpha \frac{d}{d\xi} W_{\tau, 1/2}(\xi \cdot e^{i\pi}) \end{pmatrix}$$

mit $\xi = \beta z$; $\tau = \frac{1}{2\beta}(\alpha\delta)$; $\beta = \sqrt{2\alpha/\mu_1}$

zwei linear unabhängige Lösungen des D.Gl. Systems (4.43).

Wir sehen aus der asymptotischen Darstellung für $W_{-\tau, 1/2}(\xi)$ (s. (3.33))

$$(4.58) \quad W_{-\tau, 1/2}(\xi) \sim e^{-1/2\xi} \xi^{-\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+\tau)_n (\tau)_n}{n! (-\xi)^n}$$

daß die Lösung (4.57)(a) die Randbedingung bei $z = \infty$ erfüllt.

Ferner ist $\xi = 1$ ($z=0$) (wie bei $\mu_1 > 0$) eine Regulerstelle der D.Gl. (4.43), so daß es immer eine Kombination

$$(4.59) \quad Y_1 \begin{pmatrix} f_{1,1}(\xi) \\ f_{2,1}(\xi) \end{pmatrix} + Y_2 \begin{pmatrix} f_{1,2}(\xi) \\ f_{2,2}(\xi) \end{pmatrix}$$

mit bestimmten Konstanten gibt, die Randbedingung bei $z = 0$ erfüllt. Wir müssen also den Ausschluß von Eigenwerten extra beweisen. Der Beweis wird in Hilfsatz 4-1 durchgeführt.

3. Schließlich betrachten wir den Fall $\mu_1 = 0$

Dann läßt sich (4.43) folgendermaßen schreiben:

$$(4.50) \quad \begin{cases} \frac{d}{dz} f_1(z) = \frac{\alpha}{2} f_2(z) \\ \frac{d}{dz} f_2(z) = \frac{\alpha}{2\beta} f_1(z) \end{cases}$$

mit $\xi = z + 1$

Daraus folgt

$$(4.51) \quad \frac{d^2}{d\xi^2} f_1(\xi) - \frac{\alpha^2}{4\xi} f_1(\xi) = 0$$

(4.51) ist ein Sonderfall der D.Gl. (4.23), wobei

$$(4.52) \quad \begin{cases} c = i\alpha/2 \\ q = 1/2 \end{cases} \quad \text{ist.}$$

Dementsprechend sind zwei linear unabhängige Lösungen von (4.51)

$$(4.53) \quad \begin{cases} f_{1,1}(\xi) = \xi^{1/2} I_1(\alpha \xi^{1/2}) \\ f_{1,2}(\xi) = \xi^{1/2} K_1(\alpha \xi^{1/2}) \end{cases}$$

Aus den Beziehungen [15]

$$(4.54) \quad \begin{cases} \left(\frac{d}{\xi d\xi} \right) \{ \xi I_1(\xi) \} = I_0(\xi) \\ \left(\frac{d}{\xi d\xi} \right) \{ \xi K_1(\xi) \} = -K_0(\xi) \end{cases}$$

und aus (4.50) erhalten wir damit wegen (4.54)

$$(4.55) \quad \begin{cases} f_{2,1}(\xi) = I_0(\alpha \xi^{1/2}) \\ f_{2,2}(\xi) = K_0(\alpha \xi^{1/2}) \end{cases}$$

Wir können diese Ergebnisse so zusammenfassen:

Die Funktion

$$(4.56) \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} f_{1,1}(\xi) \\ f_{2,1}(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\alpha \xi I_1(\xi) \\ I_0(\xi) \end{pmatrix} & (a) \\ \begin{pmatrix} f_{1,2}(\xi) \\ f_{2,2}(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\alpha \xi K_1(\xi) \\ -K_0(\xi) \end{pmatrix} & (b) \end{cases} \quad ; \quad \xi = \alpha \xi^{1/2}$$

wobei

$$(4.57) \quad I_n(\xi) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\xi/2)^{n+2r}}{r! \Gamma(n+r+1)} \quad (\text{modifizierte Besselsche Funktion})$$

$$(4.58) \quad K_n(\xi) = (-1)^{n+1} \left[\gamma + \ell \alpha \frac{1}{2} \xi \right] I_n(\xi) + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{(\xi/2)^{2r-n}}{r!} (n-r-1)! + \frac{1}{2} (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\xi/2)^{n+2r}}{r! (n+r)!} (k_{r,n} + k_r)$$

mit $k_\ell = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{\ell} ; \ell = 1, 2, \dots ; k_0 = 0$

sind, bilden ein Hauptsystem des D.Gl.Systems (4.1) für $\mu_1 = 0$.

Wir sehen aus der asymptotischen Darstellung für die Funktion

[16]

$$K_n(\xi) \sim \left(\frac{\pi}{2\xi} \right)^{1/2} e^{-\xi} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1/2 + n + r)}{\mu_1^r \Gamma(1/2 + n - r)} (2\xi)^{-r} \right)$$

daß die Lösung (4.56)(b) die Randbedingung bei $z = \infty$ erfüllt. Ebenfalls kann man immer eine Linearkombination von (4.56)(a) und (4.56)(b)

$$(4.59) \quad Y_1 \begin{pmatrix} f_{1,1}(\xi) \\ f_{2,1}(\xi) \end{pmatrix} + Y_2 \begin{pmatrix} f_{1,2}(\xi) \\ f_{2,2}(\xi) \end{pmatrix}$$

finden, so daß die entsprechende Lösung von (4.50) die Randbedingung bei $z = \infty$ erfüllt. Der Ausschluß von Eigenwerten muß also aus anderen Erwägungen durchgeführt werden (s. Hilfssatz 4-1).

Wir haben diesen Fall so ausführlich diskutiert, um zu beweisen, daß auch mit $M^2 - m^2 = 0$ manchmal ein exponentiell $\left\{ \begin{matrix} \text{ansteigendes} \\ \text{abfallendes} \end{matrix} \right\}$ Verhalten der Lösungen bei $z = \infty$ möglich ist.

Nun wollen wir unmittelbar aus dem D.Gl.System (4.43) beweisen, daß für $\mu_1 \neq 0$ die entsprechende Eigenwertaufgabe nicht lösbar ist.

Hilfssatz 4-1:

Sei in (4.43) $\mu_1 \neq 0$ und sei $\begin{pmatrix} f_{1,1}(z) \\ f_{2,1}(z) \end{pmatrix}$ die Lösung mit der Anfangsbedingung

$$(4.60) \quad \begin{cases} f_{1,1}(0) = \sigma_0 > 0 \\ f_{2,1}(0) = 0 \end{cases}$$

Diese Lösung erfüllt die Randbedingungen bei $z=0$ und steigt in dem Intervall $[0, \infty]$ ständig an, so daß sie wegen des Charakters ihrer asymptotischen Darstellung, die in 2. und 3. untersucht wurde, sogar ein exponentiell ansteigendes Verhalten in $[0, \infty]$ besitzt.

Beweis:

(Es bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir in (4.60)

voraussetzen. Wäre es nicht so, dann könnten wir statt $\begin{pmatrix} f_{1,1}(z) \\ f_{2,1}(z) \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -f_{1,1}(z) \\ -f_{2,1}(z) \end{pmatrix}$ nehmen, so daß $\sigma_0 > 0$ stets gültig ist).

Für $0 \geq \mu_1 = -|\mu_1|$ läßt sich (4.43) folgendermaßen schreiben:

$$(4.61) \quad \begin{cases} \frac{df_1}{dz} = \frac{1}{z} f_2 \\ \frac{df_2}{dz} = \left\{ \frac{|\mu_1|z + 1/2}{z+1} \right\} f_1 \end{cases}$$

Da die Stelle $\lambda = 0$ eine reguläre Stelle des D.Gl.Systems (4.61) ist, wissen wir nach den Existenz- und Eindeutigkeitssätzen für solche D.Gl.-Systeme, daß es eine und nur eine Lösung von (4.61) gibt, die die geforderten Anfangsbedingungen (4.60) befriedigt.

Andererseits sind für jede Stelle $\lambda > 0$ im Intervall $[0, \infty]$ die Koeffizienten von (4.61) stets positiv. Für die Lösung dieses D.Gl.Systems mit der Anfangsbedingung (4.60) erhalten wir daher

$$(4.62) \quad \begin{cases} \frac{d}{d\lambda} f_{1,1}(\lambda) > 0 \\ \frac{d}{d\lambda} f_{2,1}(\lambda) > 0 \end{cases} \quad \text{für jedes } \lambda > 0.$$

Das bedeutet aber, daß diese Funktionen ständig ansteigen (w.z.b.w.).

Folglich kann das Integral (1-6) in diesem Fall nicht beschränkt sein. Somit hat unsere Eigenwertaufgabe keine Lösung.

Ein gutes Beispiel für alles, was wir eben gesagt haben, wird uns von dem Fall

$\mu_1 = -\frac{\alpha}{2}$ geliefert, dessen Lösung mit der Anfangsbedingung (4.60) lautet

$$(4.63) \quad \begin{pmatrix} f_{1,1}(\lambda) \\ f_{2,1}(\lambda) \end{pmatrix} = \beta_0 \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{2}\lambda\right) \\ \operatorname{sh}\left(\frac{\alpha}{2}\lambda\right) \end{pmatrix}.$$

§ 4.3 Der Fall $\begin{cases} k = \pm 1, \pm 2, \dots \\ \mu_1 = 0 \\ \mu_2 = 0 \end{cases}$ Ausschluß von Eigenwerten

Wir brauchen wegen § 2.2 nur den Fall $k \geq 1$ zu betrachten. In diesem Fall läßt sich das Grund-D.Gl.System (2.1) folgendermaßen schreiben:

$$(4.64) \quad \frac{d}{d\lambda} \begin{pmatrix} f_1(\lambda) \\ f_2(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha}{2\lambda} \\ \frac{\alpha}{2(\lambda+1)} & \frac{1-k}{2(\lambda+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(\lambda) \\ f_2(\lambda) \end{pmatrix}$$

(4.64) geht durch die Transformation

$$(4.65) \quad \begin{pmatrix} t_1(\lambda) \\ t_2(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & (\lambda-1)\lambda^{\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1(\lambda) \\ t_2(\lambda) \end{pmatrix}$$

über in

$$(4.66) \quad \frac{d}{d\lambda} \begin{pmatrix} t_1(\lambda) \\ t_2(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2\lambda} & -\frac{\alpha}{2\lambda} \\ \frac{\alpha}{2(\lambda-1)} & -\left(\frac{i}{2\lambda} + \frac{k}{\lambda-1}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1(\lambda) \\ t_2(\lambda) \end{pmatrix}$$

Daraus folgt

$$(4.67) \quad -\frac{\alpha}{2} t_2(\eta) = \eta \frac{d t_1(\eta)}{d \eta} + i \frac{\alpha}{2} t_2(\eta)$$

$$(4.68) \quad \eta(1-\eta) \frac{d^2 t_1(\eta)}{d \eta^2} + \left\{ (1+i\alpha) - (1+k+i\alpha)\eta \right\} \frac{d t_1(\eta)}{d \eta} - \left(k + i \frac{\alpha}{2} \right) \left(i \frac{\alpha}{2} \right) t_1(\eta) = 0$$

(4.68) ist eine hypergeometrische D.Gl. der Gestalt

$$(4.69) \quad \eta(1-\eta) \frac{d^2 w}{d \eta^2} + \{ c - (a+b+1)\eta \} \frac{dw}{d \eta} - ab w = 0$$

mit

$$(4.70) \quad \begin{cases} a = i\alpha/2 \\ b = k + i\alpha/2 \\ c = 1 + i\alpha \end{cases}$$

Dann lauten zwei linear unabhängige Lösungen der D.Gl. (4.68) [17] :

$$(4.71) \quad \begin{cases} t_{1,1}(\eta) = {}_2F_1 \left\{ i\alpha/2; k + i\alpha/2; 1 + i\alpha; \eta \right\} \\ t_{1,2}(\eta) = \eta^{-i\alpha} {}_2F_1 \left\{ -i\alpha/2; k - i\alpha/2; 1 - i\alpha; \eta \right\}, \end{cases}$$

wobei

$$(4.72) \quad {}_2F_1 \{ a, b, c; \eta \} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{\eta^n}{n!}$$

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1) \cdots (a+n-1)$$

Wir erhalten aus der Beziehung [18]

$$(4.73) \quad \frac{d}{d\eta} \left\{ \eta^a {}_2F_1(a, b, c; \eta) \right\} = a \eta^{a-1} {}_2F_1(a+1; b; c; \eta)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta} \left\{ \eta^{\pm i\alpha/2} {}_2F_1 \left(\pm i\alpha/2; k \pm i\alpha/2; 1 \pm i\alpha; \eta \right) \right\} = \\ \pm i\alpha/2 \eta^{\pm i\alpha/2-1} {}_2F_1 \left\{ 1 \pm i\alpha/2; k \pm i\alpha/2; 1 \pm i\alpha; \eta \right\} + \\ \eta^{\pm i\alpha/2} \frac{d}{d\eta} {}_2F_1 \left\{ \pm i\alpha/2; k \pm i\alpha/2; 1 \pm i\alpha; \eta \right\} = \\ (\pm i\alpha/2) \eta^{\pm i\alpha/2} {}_2F_1 \left\{ 1 \pm i\alpha/2; k \pm i\alpha/2; 1 \pm i\alpha; \eta \right\} \end{aligned}$$

also

$$(4.74) \quad \begin{cases} \eta \frac{d}{d\eta} {}_2F_1 \left\{ \pm i\alpha/2; k \pm i\alpha/2; 1 \pm i\alpha; \eta \right\} \pm i\alpha/2 {}_2F_1 \left\{ \pm i\alpha/2; k \pm i\alpha/2; 1 \pm i\alpha; \eta \right\} \\ = \pm i\alpha/2 {}_2F_1 \left\{ 1 \pm i\alpha/2; k \pm i\alpha/2; 1 \pm i\alpha; \eta \right\} \end{cases}$$

Damit erhalten wir aus (4.67)

$$(4.75) \quad \begin{aligned} t_{2,1}(\eta) &= -i {}_2F_1 \left\{ 1 + i\frac{\alpha}{2}; k + i\frac{\alpha}{2}; 1 + i\alpha; \eta \right\} \\ t_{2,2}(\eta) &= +i \eta^{-i\alpha} {}_2F_1 \left\{ 1 - i\frac{\alpha}{2}; k - i\frac{\alpha}{2}; 1 - i\alpha; \eta \right\} \end{aligned}$$

Dementsprechend sind

$$(4.78) \quad \left\{ \begin{aligned} \begin{pmatrix} t_{1,1}(\eta) \\ t_{2,1}(\eta) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} {}_2F_1 \left\{ i\frac{\alpha}{2}; k + i\frac{\alpha}{2}; 1 + i\alpha; \eta \right\} \\ -i {}_2F_1 \left\{ 1 + i\frac{\alpha}{2}; k + i\frac{\alpha}{2}; 1 + i\alpha; \eta \right\} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} t_{1,2}(\eta) \\ t_{2,2}(\eta) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \eta^{-i\alpha} {}_2F_1 \left\{ -i\frac{\alpha}{2}; k - i\frac{\alpha}{2}; 1 - i\alpha; \eta \right\} \\ i \eta^{-i\alpha} {}_2F_1 \left\{ 1 - i\frac{\alpha}{2}; k - i\frac{\alpha}{2}; 1 - i\alpha; \eta \right\} \end{pmatrix} \end{aligned} \right.$$

zwei linear unabhängige Lösungen des D.Gl.Systems (4.66). Daraus folgt wegen (4.65), daß die Funktionen

$$(4.79) \quad \begin{aligned} \begin{pmatrix} f_{1,1}^{(1)}(z) \\ f_{2,1}^{(1)}(z) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (q+1)^{-i\frac{\alpha}{2}} {}_2F_1 \left\{ i\frac{\alpha}{2}; k + i\frac{\alpha}{2}; 1 + i\alpha; \frac{1}{q+1} \right\} \\ i \frac{q}{q+1} (q+1)^{-i\frac{\alpha}{2}} {}_2F_1 \left\{ 1 + i\frac{\alpha}{2}; k + i\frac{\alpha}{2}; 1 + i\alpha; \frac{1}{q+1} \right\} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} f_{1,2}^{(1)}(z) \\ f_{2,2}^{(1)}(z) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (q+1)^{i\frac{\alpha}{2}} {}_2F_1 \left\{ -i\frac{\alpha}{2}; k - i\frac{\alpha}{2}; 1 - i\alpha; \frac{1}{q+1} \right\} \\ -i \frac{q}{q+1} (q+1)^{i\frac{\alpha}{2}} {}_2F_1 \left\{ 1 - i\frac{\alpha}{2}; k - i\frac{\alpha}{2}; 1 - i\alpha; \frac{1}{q+1} \right\} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ein Hauptsystem des D.Gl.Systems (4.64) bilden. Ferner wissen wir [19] : Wenn a, b, c von Null verschieden und keine negativen ganzen Zahlen sind, gelten für die Konvergenz der hypergeometrischen Reihe (4.72) auf dem Einheitskreis $|z| = 1$ folgende Bedingungen:

1. (4.80) $1 > \operatorname{Re}(a+b-c) \geq 0$

Konvergenz (nicht absolut) auf dem ganzen Einheitskreis mit Ausnahme

2. (4.81) $\operatorname{Re}(a+b-c) < 0$

Absolute Konvergenz auf dem ganzen Einheitskreis

3. (4.82) $\operatorname{Re}(a+b-c) \geq 1$

Divergenz auf dem ganzen Einheitskreis.

Alle hypergeometrischen Funktionen, die in (4.79) auftreten, konvergieren also absolut für $z \in (0; \infty]$ und divergieren für $z = 0$.

Wir wollen das Verhalten der Lösungen (4.79) bei $z = 0$ untersuchen. Zu diesem Zweck benutzen wir zuerst die Transformation [20]

$$(4.83) \quad {}_2F_1 \left\{ a, b, c, z \right\} = (1-z)^{-a} {}_2F_1 \left\{ a; c-b; c; \frac{z}{z-1} \right\}$$

Damit erhalten wir

$$(4.84) \quad \begin{aligned} (z+1)^{\mp i\alpha/2} {}_2F_1 \left\{ \pm i\alpha/2; k \pm i\alpha/2; 1 \pm i\alpha; \frac{1}{z+1} \right\} \\ = {}_2F_1 \left\{ \pm i\alpha/2; k \pm i\alpha/2; 1 \pm i\alpha; -\frac{1}{z} \right\} \end{aligned}$$

Ferner gilt [21] :

$$(4.85) \quad \left\{ \begin{aligned} {}_2F_1(a; a+l; c; z) &= {}_2F_1(a+l; a; c; z) = \\ &= \frac{\Gamma(c) (-z)^{-a-l}}{\Gamma(a+l) \Gamma(c-a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{n+l} (1-c+a)_{n+l}}{n! (n+l)!} z^{-n} \cdot [\psi(-z) + \psi(1+l+n)] \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(l-n) (a)_n}{n! \Gamma(c-a-n)} \cdot z^{-n} \cdot (-z)^{-a} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a+l)} \cdot \\ &1=1, 2, \dots; |\arg(-z)| < \pi; |z| > 1; c-a \neq 0; \pm 1, \dots \end{aligned} \right.$$

In unserem Fall gilt

$$(4.86) \quad \left\{ \begin{aligned} a &= 1-k \pm i\alpha/2 \\ l &= k-1 \\ c &= 1 \pm i\alpha \end{aligned} \right.$$

Damit erhalten wir aus (4.85) und (4.84)

$$(4.87)(a) \quad \left\{ \begin{aligned} (z+1)^{\mp i\alpha/2} {}_2F_1 \left\{ \pm i\alpha/2; k \pm i\alpha/2; 1 \pm i\alpha; \frac{1}{z+1} \right\} &= \\ &= \frac{\Gamma(1 \pm i\alpha)}{\Gamma(\pm i\alpha/2) \Gamma(k \pm i\alpha/2)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-k \pm i\alpha/2)_{n+k-1} (1-k \mp i\alpha/2)_{n+k-1}}{n! (n+k-1)!} (-z)^n \cdot \\ &+ \left[-\psi z + \psi(k+n) + \psi(1+n) - \psi(\pm i\alpha/2+n) - \psi(1 \pm i\alpha/2-n) \right] + \\ &+ z^{-1-k} \frac{\Gamma(1 \pm i\alpha)}{\Gamma(\pm i\alpha/2)} \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{\Gamma(k-l-\nu) (1-k \pm i\alpha/2)}{\nu! \Gamma(1 \pm i\alpha/2)} (-z)^\nu \end{aligned} \right.$$

Ferner erhalten wir

$$(4.87) (b) \quad \left\{ \begin{aligned} & {}_2F_1^{1-k} \frac{\Gamma(1 \pm i\alpha)}{\Gamma(\pm i\alpha/2)} \cdot \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{\Gamma(k-1-\nu) (1-k \pm i\alpha/2)}{\nu! \Gamma(\pm i\alpha/2)} \cdot (-2)^\nu \\ &= (-1)^{k-1} \frac{\Gamma(1 \pm i\alpha)}{\Gamma(1-k \pm i\alpha/2)} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{\Gamma(n)}{(k-1-n)!} \cdot \frac{\Gamma(\pm i\alpha/2 - n)}{\Gamma(\pm i\alpha/2)} \cdot \frac{1}{\Gamma(n \pm i\alpha/2)} (-2)^{-n} \\ &= \frac{\Gamma(1 \pm i\alpha) (-1)^{k-1}}{\Gamma(1-k \pm i\alpha/2) \Gamma(1 \pm i\alpha/2) (k-1)!} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{(n-1)! (1-k)_n}{(1 \pm i\alpha/2)_n (1 \pm i\alpha/2)_n} (-2)^{-n} \end{aligned} \right.$$

wobei folgende Beziehungen benutzt worden sind

$$(4.88) \quad \left\{ \begin{aligned} \Gamma(\pm i\alpha/2 - n) &= (-1)^n \Gamma(\pm i\alpha/2) \frac{\Gamma(1 \mp i\alpha/2)}{\Gamma(n+1 \mp i\alpha/2)} = (-1)^n \Gamma(\pm i\alpha/2) \frac{1}{(1 \mp i\alpha/2)_n} \\ (k-1-n)! &= (-1)^n \frac{(k-1)!}{(1-k)_n} \end{aligned} \right.$$

und

$$(4.89) \quad \frac{\Gamma(1 \pm i\alpha)}{\Gamma(\pm i\alpha/2) \Gamma(k \pm i\alpha/2)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-k \pm i\alpha/2)_{n+k-1} (1-k \mp i\alpha/2)_{n+k-1}}{n! (n+k-1)!} (-2)^n \cdot$$

$$\cdot \left[-\psi(k+n) + \psi(1+n) - \psi(\pm i\alpha/2 + n) - \psi(1 \pm i\alpha/2 - n) \right] =$$

$$\frac{\Gamma(1 \pm i\alpha)}{\Gamma(\pm i\alpha/2) \Gamma(k \pm i\alpha/2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n \pm i\alpha/2)}{\Gamma(1-k \pm i\alpha/2)} \cdot \frac{\Gamma(n \mp i\alpha/2)}{\Gamma(1-k \mp i\alpha/2)} \cdot \frac{1}{n! (k)_n (k-1)!} (-2)^n \cdot$$

$$\cdot [(*)] = \frac{\Gamma(1 \pm i\alpha) (-1)^{k-1}}{\Gamma(1-k \pm i\alpha/2) \Gamma(1 \pm i\alpha/2) (k-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pm i\alpha/2)_n (\mp i\alpha/2)_n}{(k)_n n!} (-2)^n \cdot [(*)] ,$$

wobei folgende Beziehung benutzt worden ist:

$$\Gamma(\mp i\alpha/2 + 1-k) = (-1)^{k-1} \Gamma(\mp i\alpha/2) \frac{\Gamma(1 \pm i\alpha/2)}{\Gamma(k \pm i\alpha/2)}$$

Damit erhalten wir schließlich aus (4.86), (4.87) und (4.88)

$$(4.90) \quad \left\{ {}_2F_1^{1 \pm i\alpha/2} \left\{ \pm i\alpha/2; k \pm i\alpha/2; 1 \pm i\alpha; \frac{1}{2} \right\} = \right.$$

$$\frac{\Gamma(1 \pm i\alpha) (-1)^{k-1}}{\Gamma(1-k \pm i\alpha/2) \Gamma(1 \pm i\alpha/2) (k-1)!} \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{k-1} \frac{(n-1)! (1-k)_n}{(1 \mp i\alpha/2)_n (1 \pm i\alpha/2)_n} (-2)^{-n} + \right.$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pm i\alpha/2)_n (\mp i\alpha/2)_n}{(k)_n n!} (-2)^n \left(-\psi(k+n) + \psi(1+n) - \right.$$

$$\left. - \psi(\pm i\alpha/2 + n) - \psi(\mp i\alpha/2 + n) \pm \pi \cot \left\{ \pi \left(\mp i\alpha/2 \right) \right\} \right\} .$$

Σ' bedeutet, daß diese Summe für $k=1$ entfällt. Ähnlicherweise erhalten wir

$$(4.91) \quad \left\{ \begin{aligned} & \pm i \frac{2}{2+1} (1+2)^{\mp i/2} {}_2F_1 \left\{ 1 \pm i/2; k \pm i/2; 1 \pm i\alpha; \frac{1}{2+1} \right\} = \\ & \pm i \frac{\Gamma(1 \pm i\alpha) (-1)^k}{\Gamma(1-k \pm i/2) \Gamma(\pm i/2) k!} \left\{ 2 \cdot \sum_{n=1}^k \frac{(n-1)! (-k)_n}{(\mp i/2) (\pm i/2)_n} (-2)^{-n} \right. \\ & \quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 \pm i/2)_n (1 \mp i/2)_n}{(k+1)_n n!} (-2)^n (-2n+1 \mp (1+k+n) \pm (1+n) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} (1 \pm i/2 + n) - \frac{1}{2} (1 \mp i/2 + n) \pm \cot \pi (i/2)) \right\} \end{aligned} \right.$$

Wir wollen folgende lineare Kombinationen der Lösungen $\begin{pmatrix} f_{1,1}^{(0)}(z) \\ f_{2,1}^{(0)}(z) \end{pmatrix}$ und

$$\begin{pmatrix} f_{1,2}^{(0)}(z) \\ f_{2,2}^{(0)}(z) \end{pmatrix} \quad \text{bilden:}$$

$$(4.92) \quad \left\{ \begin{aligned} & \begin{pmatrix} f_{1,1}^{(0)}(z) \\ f_{2,1}^{(0)}(z) \end{pmatrix} = \frac{(-i/2) \Gamma(k) \Gamma(-i\alpha)}{\Gamma(1-i/2) \Gamma(k-i/2)} \begin{pmatrix} f_{1,1}^{(0)}(2) \\ f_{2,1}^{(0)}(2) \end{pmatrix} \\ & \quad + \frac{(i/2) \Gamma(k) \Gamma(i\alpha)}{\Gamma(1+i/2) \Gamma(k+i/2)} \begin{pmatrix} f_{1,2}^{(0)}(2) \\ f_{2,2}^{(0)}(2) \end{pmatrix} \quad (a) \\ & \begin{pmatrix} f_{1,2}^{(0)}(z) \\ f_{2,2}^{(0)}(z) \end{pmatrix} = (-i) \left\{ \frac{(-i/2) \Gamma(k) \Gamma(-i\alpha)}{\Gamma(1-i/2) \Gamma(k-i/2)} \begin{pmatrix} f_{1,1}^{(0)}(2) \\ f_{2,1}^{(0)}(2) \end{pmatrix} \right. \\ & \quad \left. + \frac{(i/2) \Gamma(k) \Gamma(i\alpha)}{\Gamma(1+i/2) \Gamma(k+i/2)} \begin{pmatrix} f_{1,2}^{(0)}(2) \\ f_{2,2}^{(0)}(2) \end{pmatrix} \right\} \quad (b) \end{aligned} \right.$$

Dann erhalten wir aus (4.90), (4.91) und der folgenden Beziehung

$$(4.93) \quad \frac{\Gamma(k) \Gamma(\mp i\alpha)}{\Gamma(\mp i/2) \Gamma(k \mp i/2)} \cdot \frac{\Gamma(1 \pm i\alpha) (-1)^{k-1}}{\Gamma(1-k \pm i/2) \Gamma(1 \pm i/2) (k-1)!} = \pm \frac{i}{2\pi} \oint \frac{\pi\alpha}{z} dz$$

die Gleichungen

$$(4.94) \quad \begin{cases} f_{1,1}^{(0)}(z) = {}_2F_1 \left\{ i\frac{\alpha}{2}; -i\frac{\alpha}{2}; k; -z \right\} \\ f_{2,1}^{(0)}(z) = {}_2F_1 \left\{ 1+i\frac{\alpha}{2}; 1-i\frac{\alpha}{2}; k+1; -z \right\} \end{cases}$$

und

$$(4.95) \quad \begin{cases} f_{1,2}^{(0)}(z) = \frac{1}{\pi} \operatorname{th}(\pi \alpha/2) \cdot \\ \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{k-1} \frac{(n-1)! (1-k)_n}{(1-i\frac{\alpha}{2})_n (1+i\frac{\alpha}{2})_n} (-z)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\frac{\alpha}{2})_n (-i\frac{\alpha}{2})_n}{n! (k)_n} (-z)^n \right. \\ \cdot \left. \left(-\ln z + \psi(1+k+n) + \psi(1+n) - \psi(1+i\frac{\alpha}{2}+n) - \psi(1-i\frac{\alpha}{2}+n) \right) \right\} \\ f_{2,2}^{(0)}(z) = \frac{1}{\pi} \operatorname{th}(\pi \alpha/2) \cdot \\ \cdot \left\{ \frac{\alpha}{2k} z \cdot \sum_{n=1}^k \frac{(n-1)! (-k)_n}{(-i\frac{\alpha}{2})_n (i\frac{\alpha}{2})_n} (-z)^{-n} + \frac{\alpha}{2k} z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i\frac{\alpha}{2})_n (1-i\frac{\alpha}{2})_n}{(k+1)_n n!} (-z)^n \right. \\ \cdot \left. \left(-\ln z + \psi(1+k+n) + \psi(1+n) - \psi(1+i\frac{\alpha}{2}+n) - \psi(1-i\frac{\alpha}{2}+n) \right) \right\}. \end{cases}$$

Wir sehen also, daß die Lösung $\begin{pmatrix} f_{1,1}^{(0)}(z) \\ f_{2,1}^{(0)}(z) \end{pmatrix}$ die Randbedingungen bei $z = 0$ erfüllt.

Nun wollen wir beweisen, daß die Funktionen $f_{1,1}^{(0)}(z), f_{2,1}^{(0)}(z)$ die Integralbedingung (1.6) nicht befriedigt.

In der Tat erhalten wir aus (4.92) und (4.79)

$$(4.96) \quad \begin{cases} f_{1,1}^{(0)}(z) = \frac{\Gamma(k) \Gamma(-i\alpha)}{\Gamma(-i\frac{\alpha}{2}) \Gamma(k-i\frac{\alpha}{2})} (2+1)^{-i\frac{\alpha}{2}} {}_2F_1 \left\{ i\frac{\alpha}{2}; k+i\frac{\alpha}{2}; 1+i\alpha; \frac{1}{2+1} \right\} \\ + \frac{\Gamma(k) \Gamma(i\alpha)}{\Gamma(i\frac{\alpha}{2}) \Gamma(k+i\frac{\alpha}{2})} (2+1)^{i\frac{\alpha}{2}} {}_2F_1 \left\{ -i\frac{\alpha}{2}; k-i\frac{\alpha}{2}; 1-i\alpha; \frac{1}{2+1} \right\} \\ f_{2,1}^{(0)}(z) = \frac{\alpha}{2} \frac{\Gamma(k) \Gamma(i\alpha)}{\Gamma(1+i\frac{\alpha}{2}) \Gamma(k+i\frac{\alpha}{2})} \frac{z}{2+1} (2+1)^{-i\frac{\alpha}{2}} {}_2F_1 \left\{ 1+i\frac{\alpha}{2}; k+i\frac{\alpha}{2}; 1+i\alpha; \frac{1}{2+1} \right\} \\ + \frac{\alpha}{2} \frac{\Gamma(k) \Gamma(-i\alpha)}{\Gamma(1-i\frac{\alpha}{2}) \Gamma(k-i\frac{\alpha}{2})} \frac{z}{2+1} (2+1)^{i\frac{\alpha}{2}} {}_2F_1 \left\{ 1-i\frac{\alpha}{2}; k-i\frac{\alpha}{2}; 1-i\alpha; \frac{1}{2+1} \right\} \end{cases}$$

Nun erhalten wir mit der Notation

$$(4.97) \quad \frac{\Gamma(k) \Gamma(-i\alpha)}{\Gamma(-i\frac{\alpha}{2}) \Gamma(k-i\frac{\alpha}{2})} = \left\| \frac{\Gamma(k) \Gamma(-i\alpha)}{\Gamma(-i\frac{\alpha}{2}) \Gamma(k-i\frac{\alpha}{2})} \right\| \cdot e^{i\beta_0^{(k)}}$$

aus (4.96)

$$(4.98) \quad \begin{cases} f_{2,1}^{(0)}(z) = \left\{ \frac{2}{\pi\alpha} \operatorname{th}\left(\pi\frac{\alpha}{2}\right) \prod_{r=1}^{k-1} \frac{r^2}{r^2 + \alpha^2/4} \right\} \cos\left(\beta_0^{(k)} + \frac{\alpha}{2} \operatorname{th}(\pi z)\right) + O(1/z) \\ f_{2,1}^{(0)}(z) = -\frac{2}{2+1} \left\{ \frac{2}{\pi\alpha} \operatorname{th}\left(\pi\frac{\alpha}{2}\right) \prod_{r=1}^{k-1} \frac{r^2}{r^2 + \alpha^2/4} \right\} \sin\left(\beta_0^{(k)} + \frac{\alpha}{2} \operatorname{th}(\pi z)\right) + O(1/z) \end{cases}$$

wobei

$$(4.99) \quad \beta_0^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{k-1} \theta_\nu + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (z^2-1) \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2n+1} \zeta(2n+1)$$

mit $\theta_n = \operatorname{arctg}\left\{\frac{\alpha}{2n}\right\}$ und $\zeta(z)$ die Zeta-Funktion von Riemann ist.

Aus (4.98) folgt unmittelbar, daß die Integralbedingung (1.6) von den Funktionen

(4.96) nicht erfüllt sind, d.h. $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0$; k = beliebig ist kein Eigenwert.

Es ist hier wichtig zu bemerken, daß sowohl die Matrix

$$(4.100) \quad F^{(0)}(z) = \begin{pmatrix} f_{1,1}^{(0)}(z) & f_{1,2}^{(0)}(z) \\ f_{2,1}^{(0)}(z) & f_{2,2}^{(0)}(z) \end{pmatrix}$$

als auch die Matrix

$$(4.101) \quad F^{(10)}(z) = \begin{pmatrix} f_{1,1}^{(10)}(z) & f_{1,2}^{(10)}(z) \\ f_{2,1}^{(10)}(z) & f_{2,2}^{(10)}(z) \end{pmatrix}$$

Hauptlösungen der Matrix D.Gl.

$$(4.102) \quad \frac{d}{dz} F(z) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha}{2z} \\ \alpha & \frac{1-k}{2(z+1)} \end{pmatrix} F(z)$$

sind. Zwischen ihnen besteht folgende Beziehung

$$F^{(0)}(z) = F^{(10)}(z) \Lambda(\alpha, k)$$

(4.103)

$$\Lambda(\alpha, k) = \begin{pmatrix} \frac{\Gamma(k) \Gamma(-i\alpha)}{\Gamma(-i\frac{\alpha}{2}) \Gamma(k-i\frac{\alpha}{2})} & \frac{\Gamma(k) \Gamma(i\alpha)}{\Gamma(i\frac{\alpha}{2}) \Gamma(k+i\frac{\alpha}{2})} \\ -\frac{i \Gamma(k) \Gamma(-i\alpha)}{\Gamma(-i\frac{\alpha}{2}) \Gamma(k-i\frac{\alpha}{2})} & -\frac{i \Gamma(k) \Gamma(i\alpha)}{\Gamma(i\frac{\alpha}{2}) \Gamma(k+i\frac{\alpha}{2})} \end{pmatrix}$$

Noch wichtiger ist es zu bemerken, daß $\tilde{F}^{(\infty)}(z)$ aus (4.79) sich folgendermaßen ausdrücken läßt:

$$(4.104) \quad \tilde{F}^{(\infty)}(z) = P^{(\infty)}(z) \begin{pmatrix} (z+1)^{-i\frac{\alpha}{2}} & (z+1)^{+i\frac{\alpha}{2}} \\ i(z+1)^{-i\frac{\alpha}{2}} & (z+1)^{+i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} = P^{(\infty)}(z) V^{(\infty)}(z)$$

mit

$$(4.105) \quad \left\{ \begin{aligned} P_{1,1}^{(\infty)}(z) &= \frac{1}{2} z F_1 \left\{ i\frac{\alpha}{2}; k+i\frac{\alpha}{2}; 1+i\alpha; \frac{1}{z+1} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} z F_1 \left\{ -i\frac{\alpha}{2}; k-i\frac{\alpha}{2}; 1-i\alpha; \frac{1}{z+1} \right\} \\ P_{1,2}^{(\infty)}(z) &= -\frac{i}{2} z F_1 \left\{ i\frac{\alpha}{2}; k+i\frac{\alpha}{2}; 1+i\alpha; \frac{1}{z+1} \right\} \\ &\quad + \frac{i}{2} z F_1 \left\{ -i\frac{\alpha}{2}; k-i\frac{\alpha}{2}; 1-i\alpha; \frac{1}{z+1} \right\} \end{aligned} \right.$$

$$(4.106) \quad \left\{ \begin{aligned} P_{2,1}^{(\infty)}(z) &= -i\frac{\alpha}{2} \frac{z}{z+1} z F_1 \left\{ 1+i\frac{\alpha}{2}; k+i\frac{\alpha}{2}; 1+i\alpha; \frac{1}{z+1} \right\} \\ &\quad + i\frac{\alpha}{2} \frac{z}{z+1} z F_1 \left\{ 1-i\frac{\alpha}{2}; k-i\frac{\alpha}{2}; 1-i\alpha; \frac{1}{z+1} \right\} \\ P_{2,2}^{(\infty)}(z) &= \frac{1}{2} \frac{z}{z+1} z F_1 \left\{ 1+i\frac{\alpha}{2}; k+i\frac{\alpha}{2}; 1+i\alpha; \frac{1}{z+1} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{z}{z+1} z F_1 \left\{ 1-i\frac{\alpha}{2}; k-i\frac{\alpha}{2}; 1-i\alpha; \frac{1}{z+1} \right\}, \end{aligned} \right.$$

wobei $V^{(\infty)}(z)$ die Hauptmatrix der reduzierten Matrix-D.Gl. für $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0$ ist, die in (3.72) (b) angegeben wurde.

Ferner sehen wir aus (4.105) und (4.106), daß

$$(4.107) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} P^{(\infty)}(z) = I \quad \text{ist.}$$

ist eine Lösung der Matrix-D.Gl.

$$(4.108) \quad \frac{d}{dz} P(z) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1/2}{z-1} \\ \frac{\alpha/2}{z} & \frac{1-k}{z(z-1)} \end{pmatrix} P(z) - P(z) \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha}{2z} \\ \frac{\alpha}{2z} & 0 \end{pmatrix}$$

mit

und läßt sich in einer (absolut) konvergenten Reihe der Gestalt entwickeln:

$$(4.109) \quad \left\{ \begin{array}{l} P^{(\infty)}\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\infty)} \frac{x^n}{n!} \quad |x| < 1 \\ P_0^{(\infty)} = I \end{array} \right.$$

Wir erhalten aus (4.105) und (4.106) für $P_n^{(\infty)}$ in (4.109)

$$(4.110) \quad P_n^{(\infty)} = \begin{pmatrix} P_{1,n}^{(\infty)} & P_{2,n}^{(\infty)} \\ P_{3,n}^{(\infty)} & P_{4,n}^{(\infty)} \end{pmatrix}$$

mit

$$(4.111) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{1,n}^{(\infty)} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(+i\frac{\alpha}{2})_n (k+i\frac{\alpha}{2})_n}{(1+i\alpha)_n n!} + \frac{(-i\frac{\alpha}{2})_n (k+i\frac{\alpha}{2})_n}{(1-i\alpha)_n n!} \right\} \\ P_{3,n}^{(\infty)} = \frac{1}{2i} \left\{ \frac{(i\frac{\alpha}{2})_n (k+i\frac{\alpha}{2})_n}{(1+i\alpha)_n n!} - \frac{(-i\frac{\alpha}{2})_n (k+i\frac{\alpha}{2})_n}{(1-i\alpha)_n n!} \right\} \end{array} \right.$$

$$(4.112) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{2,n}^{(\infty)} = \frac{1}{2i} \left\{ \frac{(1+i\frac{\alpha}{2})_n (k+i\frac{\alpha}{2})_n}{(1+i\alpha)_n n!} - \frac{(1-i\frac{\alpha}{2})_n (k-i\frac{\alpha}{2})_n}{(1-i\alpha)_n n!} \right\} \\ \quad - \frac{1}{2i} \left\{ \frac{(1+i\frac{\alpha}{2})_{n-1} (k+i\frac{\alpha}{2})_{n-1}}{(1+i\alpha)_{n-1} (n-1)!} - \frac{(1-i\frac{\alpha}{2})_{n-1} (k-i\frac{\alpha}{2})_{n-1}}{(1-i\alpha)_{n-1} (n-1)!} \right\} \\ P_{4,n}^{(\infty)} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(1+i\frac{\alpha}{2})_n (k-i\frac{\alpha}{2})_n}{(1+i\alpha)_n n!} + \frac{(1-i\frac{\alpha}{2})_n (k-i\frac{\alpha}{2})_n}{(1-i\alpha)_n n!} \right\} \\ \quad - \frac{1}{2} \left\{ \frac{(1+i\frac{\alpha}{2})_{n-1} (k-i\frac{\alpha}{2})_{n-1}}{(1+i\alpha)_{n-1} (n-1)!} + \frac{(1-i\frac{\alpha}{2})_{n-1} (k-i\frac{\alpha}{2})_{n-1}}{(1-i\alpha)_{n-1} (n-1)!} \right\} \end{array} \right.$$

Die Matrix

$$(4.113) \quad P^{(\infty)}(z) = F^{(\infty)}(z) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (2+z)^{i\frac{\alpha}{2}} & \frac{1}{2i} (2+z)^{+i\frac{\alpha}{2}} \\ \frac{1}{2} (2+z)^{-i\frac{\alpha}{2}} & -\frac{1}{2i} (2+z)^{+i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix}$$

ist auch eine Lösung der Matrix-D.Gl. (4.108). Wir erhalten nach (4.103) und (4.104) folgende Beziehung zwischen $P^{(\infty)}(z)$ und $P^{(\infty)}(z)$

$$(4.114) \quad P^{(\infty)}(z) = P^{(\infty)}(z) V^{(\infty)}(z) \Lambda(\nu, k) (V^{(\infty)}(z))^{-1}$$

Es ist weiterhin einfach zu sehen, daß jede Lösung von (4.108) mit einer geeigneten Konstantenmatrix $C(\nu, k)$ sich folgendermaßen ausdrücken läßt

$$(4.115) \quad P(z) = P^{(\infty)}(z) V^{(\infty)}(z) C(\nu, k) (V^{(\infty)}(z))^{-1}.$$

Es ist wichtig zu betonen, daß in der Zerlegung von $F^{(s)}(z)$ in (4.104) $P^{(s)}(z)$ die ganze Singularität in $z = 0$ bzw. $V^{(s)}(z)$ die ganze Singularität in $z = \infty$ der Funktion $F^{(s)}(z)$ trägt.

5. Analytische Struktur des Grund-D.Gl.Systems bei $z = 0$

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der analytischen Struktur der Lösungen des Grund-D.Gl.Systems (2.1) bei der außerwesentlichen Singulärstelle $z = 0$. Außerdem führen wir die Übergangsmatrix $P^{(s)}(z)$ ein und bestimmen auch ihre analytische Struktur.

§ 5.1 Bestimmung der analytischen Struktur der Lösung in der außerwesentlichen Singulärstelle $z = 0$.

Betrachten wir das Grund-D.Gl.System

$$(5.1) \quad \frac{d}{dz} f_1(z) = \left(\mu_2 + \frac{s}{z}\right) f_2$$

$$\frac{d}{dz} f_2(z) = \left(-\mu_1 + \frac{\delta}{z+1}\right) f_1 + \frac{1-k}{z(z+1)} f_2$$

mit

$$(5.2) \quad \begin{cases} \delta = \frac{\alpha}{z} + \mu_1 \\ s = \mu_2 - \frac{\alpha}{z} \\ k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Wir wollen zuerst die Struktur der Lösungen in der Umgebung der außerwesentlichen Singulärstelle $z = 0$ dieses D.Gl.Systems bestimmen.

Die charakteristische Gleichung von (5.1) lautet

$$(5.3) \quad \begin{vmatrix} -\lambda & s \\ 0 & -\lambda + 1 - k \end{vmatrix} = 0$$

Sie besitzt die Wurzeln

$$(5.4) \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 - k \end{cases}$$

Dann [22] gibt es zu der größeren Wurzel $\lambda_1 = 0$ eine analytische Lösung der Gestalt

$$(5.5) \quad \begin{cases} f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,1} z^n \\ f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,2} z^n \end{cases}$$

Durch Einsetzung von (5.5) in (1.1) finden wir, daß für die Koeffizienten der niedrigsten Potenz (d.h. z^0)

$$(5.6) \quad \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 1-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{0,1} \\ a_{0,2} \end{pmatrix} = 0$$

gelten muß. Daraus folgt

$$(5.7) \quad \begin{cases} \beta a_{0,2} = 0 \\ (1-k) a_{0,2} = 0 \end{cases}$$

Der Fall $\beta=0$; $k=1$ wurde in Strenge in Kapitel 3 integriert. Wir können daher hier voraussetzen, daß mindestens eine der Ungleichungen $\beta \neq 0$; $k \neq 1$ erfüllt ist. Dann erhalten wir aus (5.7)

$$(5.8) \quad a_{0,2} = 0$$

Dementsprechend ist in unserem Fall die analytische Lösung von (5.1) von der Gestalt

$$(5.9) \quad \begin{aligned} f_{1,1}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,1} z^n = a_{0,1} + O(z) \quad (a_{0,1} \neq 0) \\ f_{2,1}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,2} z^n = a_{1,2} z + O(z^2) \end{aligned}$$

Ferner sei $\left\{ \begin{matrix} f_{1,2}(z) \\ f_{2,2}(z) \end{matrix} \right\}$ eine zu (5.9) linear unabhängige Lösung von (5.1) und sei

$$(5.10) \quad \Delta(z) = \begin{vmatrix} f_{1,1}(z) & f_{1,2}(z) \\ f_{2,1}(z) & f_{2,2}(z) \end{vmatrix}$$

Dann gilt nach (2.4)

$$(5.11) \quad \frac{d}{dz} \Delta(z) = \frac{1-k}{z(z+1)} \Delta(z)$$

Daraus folgt

$$(5.12) \quad \Delta(z) = \mathcal{U}_0 \left(\frac{z}{z+1} \right)^{1-k},$$

wobei $\mathcal{U}_0 \neq 0$ eine beliebige Integrationskonstante ist. Folglich erhalten wir aus (5.12)

$$(5.13) \quad f_{2,2}(z) = \left(f_{2,1}(z) / f_{1,1}(z) \right) f_{1,2}(z) + \frac{\mathcal{U}_0}{f_{1,1}(z)} \left(\frac{z}{z+1} \right)^{1-k}$$

Außerdem gilt aber

$$(5.14) \quad (a) \quad \frac{d}{dz} f_{1,2}(z) = \left(\mu_2 + \frac{\rho}{2} \right) f_{2,2}(z)$$

$$(b) \quad \frac{d}{dz} f_{2,2}(z) =$$

Dann erhalten wir aus der Gleichung (5.14) (a) und (5.13)

$$(5.15) \quad \frac{d}{dz} f_{1,2}(z) = \left(\mu_2 + \frac{\rho}{2} \right) \frac{f_{2,1}(z)}{f_{1,1}(z)} f_{2,2}(z) + \left(\mu_2 + \frac{\rho}{2} \right) \frac{\eta_0}{f_{1,1}(z)} \left(\frac{z}{2+1} \right)^{1-k}$$

Dann lautet die Lösung von (5.15)

$$(5.16) \quad f_{1,2}(z) = \exp \left\{ \int_0^z \left(\mu_2 + \frac{\rho}{2} \right) \frac{f_{2,1}(t)}{f_{1,1}(t)} dt \right\} \cdot$$

$$\cdot \int_{\sigma_0}^z \exp \left\{ - \int_0^t \left(\mu_2 + \frac{\rho}{2} \right) \frac{f_{2,1}(t)}{f_{1,1}(t)} dt \right\} \cdot \frac{\eta_0}{f_{1,1}(t)} \left(\frac{t}{2+1} \right)^{1-k} dt$$

Wegen (5.9) müssen aber die Funktionen

$$(5.17) \quad \left(\mu_1 + \frac{\rho}{2} \right) \frac{f_{2,1}(z)}{f_{1,1}(z)} \quad \text{bzw.}$$

$$(5.18) \quad \exp \left\{ \int_0^z \left(\mu_2 + \frac{\rho}{2} \right) \frac{f_{2,1}(t)}{f_{1,1}(t)} dt \right\} \quad \text{bzw.}$$

$$(5.19) \quad \exp \left\{ - \int_0^z \left(\mu_2 + \frac{\rho}{2} \right) \frac{f_{2,1}(t)}{f_{1,1}(t)} dt \right\} \frac{\eta_0}{f_{1,1}(t)}$$

in $z = 0$ und in einer Umgebung von $z = 0$ analytisch sein. Sie lassen sich daher in dieser Umgebung in absolut konvergente Reihen in Potenzen von z entwickeln.

Damit erhalten wir

$$(5.20) \quad f_{1,2}(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n \right) \int_{\sigma_0}^z \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n \eta^{-k+n} \right) d\eta$$

Hier ist anzumerken, daß $q_0 = 0$ ist, wenn $\rho = 0$ ist. Nach Integration und Multiplikation der entsprechenden Reihe erhalten wir allgemein

$$(5.21) \quad f_{1,2}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} z^{1-k+n} + b_0 z \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} z^n$$

Damit folgt aus (5.13) und (5.21)

$$(5.22) \quad f_{2,2}(z) = \frac{f_{2,1}(z)}{f_{1,1}(z)} \sum_{n=0}^{\infty} b_{n,2} z^{1-k+n} + \ln z \frac{f_{2,1}(z)}{f_{1,1}(z)} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,2} z^n + \frac{x_0}{f_{1,1}(z)} \left(\frac{z}{2+1}\right)^{1-k}.$$

also nach (5.9)

$$(5.23) \quad f_{2,2}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n,2} z^{1-k+n} + \ln z \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,2} z^n,$$

wobei $b_{0,2} \neq 0$ und $c_{0,2} = 0$ sein müssen. Wir können also diese Ergebnisse folgendermaßen zusammenfassen:

1. Es gibt eine Lösung des D.Gl.Systems (5.1), die analytisch in $z = 0$ und in einer bestimmten Umgebung von $z = 0$ ist. Diese hat die Gestalt

$$(5.24) \quad \begin{cases} f_{1,1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,1} z^n \\ f_{2,1}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,2} z^n \end{cases}$$

wobei $a_{0,1}$ von Null verschieden ist.

2. Es gibt eine zu (5.24) linear unabhängige Lösung von (5.1) von der Gestalt

$$(5.25) \quad \begin{cases} f_{1,2}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n,1} z^{1-k+n} + \ln z \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,1} z^n \\ f_{2,2}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n,2} z^{1-k+n} + \ln z \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,2} z^n \end{cases}$$

wobei $b_{0,1} \neq 0$ und $c_{0,1} = 0$ sind. Wenn $\beta = 0$ ist, dann ist auch $b_{0,1} = 0$. Es ist also klar, daß nur die Lösung (5.24) die Anfangsbedingung erfüllt.

Wir können diese Lösungen (5.24) und (5.25) in einer Vektornotation folgendermaßen schreiben:

$$(5.26) \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} f_{1,1}(z) \\ f_{2,1}(z) \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_n^{(1)} \\ a_n^{(2)} \end{pmatrix} z^n \\ \begin{pmatrix} f_{1,2}(z) \\ f_{2,2}(z) \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} b_n^{(1)} \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix} z^{n+1-k} + \ln z \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} c_n^{(1)} \\ c_n^{(2)} \end{pmatrix} z^n \end{cases}$$

mit

$$(5.27) \quad \left. \begin{matrix} a_0^{(3)} = 0 \\ c_0^{(4)} = 0 \end{matrix} \right\} ; \quad \left. \begin{matrix} a_0^{(1)} \neq 0 \\ a_0^{(2)} \neq 0 \end{matrix} \right\}.$$

Wir wollen die Lösungen (5.26) insbesondere mit der Auswahl

$$(5.28) \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} a_0^{(1)} \\ a_0^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_0^{(3)} \\ a_0^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} ; \quad \begin{pmatrix} c_0^{(1)} \\ c_0^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left(\text{für } k=1 \right)$$

und

$$(5.29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \theta_0^{(1)} \\ \theta_0^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \theta_0^{(1)} \\ \theta_0^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 1-k \end{pmatrix} \end{array} \right. ; \quad \begin{pmatrix} \theta_{k-1}^{(2)} \\ \theta_{k-1}^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_0 \\ \chi_1 \end{pmatrix} \quad (\text{für } k \geq 1),$$

wobei χ_0 und χ_1 bestimmte Konstanten sind, folgendermaßen bezeichnen:

$$(5.30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \hat{f}_{1,1}(z) \\ \hat{f}_{2,1}(z) \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_n^{(1)} \\ \hat{\alpha}_n^{(2)} \end{pmatrix} z^n \\ \begin{pmatrix} \hat{f}_{1,2}(z) \\ \hat{f}_{2,2}(z) \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_n^{(2)} \\ \hat{\alpha}_n^{(4)} \end{pmatrix} z^{n+1-k} + \theta_1 z \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_n^{(2)} \\ \hat{\alpha}_n^{(4)} \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Folglich müssen für jede Lösung des D.Gl.Systems (5.1) zwei Konstanten δ_1 und δ_2 existieren, so daß

$$(5.31) \quad \begin{pmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \end{pmatrix} = \delta_1 \begin{pmatrix} \hat{f}_{1,1}(z) \\ \hat{f}_{2,1}(z) \end{pmatrix} + \delta_2 \begin{pmatrix} \hat{f}_{1,2}(z) \\ \hat{f}_{2,2}(z) \end{pmatrix}$$

gilt. Ferner können wir mit den Lösungen (5.30) eine Matrix folgendermaßen bilden:

$$(5.32) \quad F^{(10)}(z) = \begin{pmatrix} \hat{f}_{1,1}(z) & \hat{f}_{1,2}(z) \\ \hat{f}_{2,1}(z) & \hat{f}_{2,2}(z) \end{pmatrix}$$

Diese Matrix haben wir in (1.8) benutzt. Sie erfüllt die Matrix-D.Gl.

$$(5.33) \quad z \frac{d}{dz} F(z) = \begin{pmatrix} 0 & \mu_2 z + s \\ -\mu_1 z + \delta \frac{z}{z+1} & \frac{1-k}{z+1} \end{pmatrix} F(z)$$

§ 5.2 Betrachtungen über die Grund-Matrix-D.Gl. (5.33)

Wir erhalten umgekehrt, daß die Spalten jeder Lösung $F(z)$ der Matrix-D.Gl. (5.33) auch Lösungen des D.Gl.Systems (5.1) sind. Ist ferner die Determinante von $F(z)$ in jeder Regulärstelle von (5.33) von Null verschieden, dann sind ihre Spalten sogar linear unabhängige Lösungen von (5.1), so daß die Matrix-D.Gl. (5.33) gleichwertig mit der Theorie für das D.Gl.System (5.1) ist.

Insbesondere für kleine Werte von z lassen sich die Lösungen von (5.33) folgendermaßen ausdrücken:

$$(5.34) \quad F'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n z^{n+1-k} + b_1 z \sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n$$

wobei R_n und S_n bestimmte Konstantenmatrizen sind.

Für die Lösung $\hat{F}^{(k)}(z)$ (s. (5.32)) besitzen diese Matrizen folgende Gestalt:

1. Für $k = 1$

$$(5.35) \quad \hat{R}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \hat{R}_n = \begin{pmatrix} \hat{a}_n^{(1)} & \hat{a}_n^{(2)} \\ \hat{a}_n^{(3)} & \hat{a}_n^{(4)} \end{pmatrix} \quad (n \geq 1)$$

$$\hat{S}_n = \begin{pmatrix} 0 & \hat{c}_n^{(2)} \\ 0 & \hat{c}_n^{(4)} \end{pmatrix}$$

und

2. Für $k \geq 1$

$$(5.36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{R}_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{k-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \hat{R}_n = \begin{pmatrix} 0 & \hat{a}_n^{(2)} \\ 0 & \hat{a}_n^{(4)} \end{pmatrix} \quad n < k-1 \\ \hat{R}_n = \begin{pmatrix} \hat{a}_n^{(1)} & \hat{a}_n^{(2)} \\ \hat{a}_n^{(3)} & \hat{a}_n^{(4)} \end{pmatrix}; \quad \hat{S}_n = \begin{pmatrix} 0 & \hat{c}_n^{(2)} \\ 0 & \hat{c}_n^{(4)} \end{pmatrix} \\ \quad (n \geq k-1) \end{array} \right.$$

Hilfssatz 5.1:

Es möge eine nicht singuläre Lösung der Matrix-D.Gl. (5.33) in der Gestalt (5.34) gegeben sein. Wenn dann R_0 für $k = 1$ bzw. $k \geq 2$ die Gestalt

$$(5.37) \quad R_0 \equiv \begin{pmatrix} r_0^{(1)} & r_0^{(2)} \\ 0 & r_0^{(4)} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.}$$

$$(5.38) \quad R_0 \equiv \begin{pmatrix} 0 & r_0^{(2)} \\ 0 & r_0^{(4)} \end{pmatrix}$$

annimmt, müssen die Matrizen S_n ($n \geq 0$) bzw. die Matrizen S_n ($n \geq 0$) und R_n ($n < k-1$) bis auf eine multiplikative Konstante die in (5.35) und (5.36) angegebene Gestalt haben.

Beweis: Wir betrachten zuerst den Fall $k = 1$.

(a) Wenn R_0 in (5.34) die Gestalt (5.37) annimmt, dann läßt sich die erste Spalte von $F'(z)$ folgendermaßen ausdrücken

$$(5.39) \quad \begin{pmatrix} f_1^{(1)}(z) \\ f_1^{(2)}(z) \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} r_n^{(1)} \\ r_n^{(2)} \end{pmatrix} z^n + b_1 z \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} s_n^{(1)} \\ s_n^{(2)} \end{pmatrix} z^n,$$

mit $r_0^{(3)} = 0$

Ferner ist aber $\begin{pmatrix} f^{(1)}(z) \\ f^{(2)}(z) \end{pmatrix}$ eine Lösung des D.Gl. Systems (5.1) und folglich müssen zwei Konstanten δ_1 und δ_2 existieren, so daß

$$(5.40) \quad \begin{pmatrix} f^{(1)}(z) \\ f^{(2)}(z) \end{pmatrix} = \delta_1 \begin{pmatrix} \hat{f}_{1,1}(z) \\ \hat{f}_{2,1}(z) \end{pmatrix} + \delta_2 \begin{pmatrix} \hat{f}_{1,2}(z) \\ \hat{f}_{2,2}(z) \end{pmatrix}$$

gilt. Speziell muß der logarithmusfreie Teil von $\begin{pmatrix} f^{(1)}(z) \\ f^{(2)}(z) \end{pmatrix}$ eine entsprechende Linearkombination der logarithmusfreien Teile der Grundlösungen (5.30) sein, also

$$(5.41) \quad \begin{pmatrix} p_n^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix} = \delta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt

$$(5.42) \quad \delta_2 = 0$$

Das aber heißt, daß $\begin{pmatrix} f^{(1)}(z) \\ f^{(2)}(z) \end{pmatrix}$ bis auf eine multiplikative Konstante mit $\begin{pmatrix} \hat{f}_{1,1}(z) \\ \hat{f}_{2,1}(z) \end{pmatrix}$ übereinstimmen muß. Dementsprechend darf diese Stelle keinen Logarithmus enthalten, so daß alle $S_n^{(i)} = 0 \quad \{i=1,2\}_{n \geq 0}$ sein müssen.

b) Sei nun der Fall $k \geq 2$ gegeben.

Wenn jetzt R_0 die Gestalt (5.38) besitzt, dann läßt sich die erste Spalte der entsprechenden Matrix $F(z)$ in (5.34) folgendermaßen ausdrücken:

$$(5.43) \quad \begin{pmatrix} f^{(1)}(z) \\ f^{(2)}(z) \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} p_n^{(1)} \\ p_n^{(2)} \end{pmatrix} z^{n+1-k} + b_2 z \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} s_n^{(1)} \\ s_n^{(2)} \end{pmatrix} z^n,$$

$$\text{mit } p_n^{(i)} = 0 \quad ; (i=1,2).$$

Wieder stellt (5.43) eine Lösung des D.Gl. Systems (5.1) mit $k \geq 2$ dar, folglich müssen zwei Konstanten δ_1, δ_2 existieren, so daß

$$(5.44) \quad \begin{pmatrix} f^{(1)}(z) \\ f^{(2)}(z) \end{pmatrix} = \delta_1 \begin{pmatrix} \hat{f}_{1,1}(z) \\ \hat{f}_{2,1}(z) \end{pmatrix} + \delta_2 \begin{pmatrix} \hat{f}_{1,2}(z) \\ \hat{f}_{2,2}(z) \end{pmatrix}$$

gilt. Machen wir jetzt den Koeffizienten der Potenz z^{1-k} in beiden Seiten von (5.44) gleich, so erhalten wir

$$(5.45) \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \delta_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta_2 \begin{pmatrix} \frac{g}{1-k} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt

$$(5.46) \quad \delta_2 = 0 \quad \text{sein muß.}$$

Das aber bedeutet nach (5.44), daß $\left(\int_{\gamma_1}^{(1)} \frac{1}{z}\right)$ bis auf eine multiplikative Konstante mit $\left(\int_{\gamma_1} \frac{1}{z}\right)$ übereinstimmen muß. Dementsprechend besitzt diese Funktion keine Pole und keinen Logarithmus. Daraus folgt, daß S_n ($n \geq 0$) und R_n ($n < k-1$) bis auf eine multiplikative Konstante mit den in (5.36) angegebenen Matrizen übereinstimmen müssen (w.z.b.w.).

§ 5.3 Bestimmung einer Hauptmatrix $P^{(n)}(z)$ der Übergangsmatrix-D.Gl.

Betrachten wir wieder die Matrix-D.Gl. (5.33) und zugleich die reduzierte Matrix-D.Gl.

$$(5.47) \quad 2 \frac{d}{dz} V(z) = \begin{pmatrix} 0 & \mu_2 z + \rho \\ -\mu_1 z + \delta \frac{z}{z+1} & \frac{1-k}{z+1} \end{pmatrix} V(z)$$

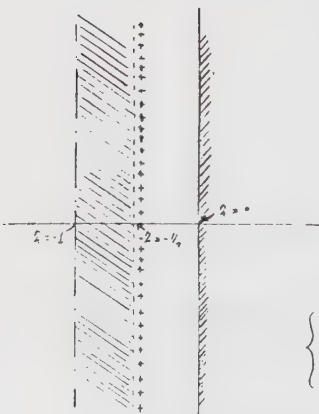
$$\text{mit } \begin{cases} \rho = \mu_1 - \frac{\kappa}{z} \\ \delta = \frac{\kappa}{z} + \mu_1 \end{cases}$$

Es ist zweckmäßig, in (5.33) und (5.47) die folgende Transformation der unabhängigen Veränderlichen durchzuführen:

$$(5.48) \quad z = \frac{x}{1-x}$$

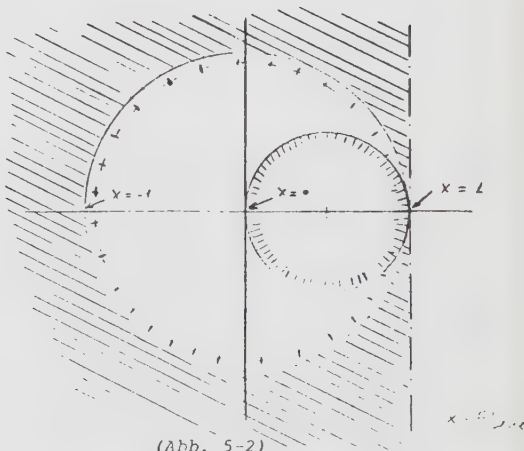
(Die Inverse dazu lautet $x = \frac{z}{z+1}$).

Durch (5.48) wird die 2. Ebene (Abb. 5-1) in die x-Ebene (Abb. 5-2) abgebildet.



(Abb. 5-1)

$$\begin{cases} x = \frac{z}{z+1} \\ z = -1 + \frac{1}{1-x} \end{cases}$$



(Abb. 5-2)

Wir sind bei $\mathbb{L}$ an dem Intervall $[0; \infty]$ und dementsprechend bei x' an dem Intervall $[0; 1]$ interessiert. Setzen wir nun (5.48) in (5.33) und (5.47) ein, so erhalten wir

$$(5.49) \quad x(1-x) \frac{d}{dx} F = \begin{pmatrix} 0 & \mu_2 \frac{x}{1-x} + \vartheta \\ -\mu_1 \frac{x}{1-x} + \delta x & (1-k)(1-x) \end{pmatrix} F$$

$$(5.50) \quad x(1-x) \frac{d}{dx} V = \begin{pmatrix} 0 & \mu_2 \frac{x}{1-x} + \vartheta x \\ -\mu_1 \frac{x}{1-x} + \delta x & 0 \end{pmatrix} V$$

Dies schreiben wir in der Form

$$(5.51) \quad x \frac{d}{dx} F(x) = \{A_0 + A(x)\} F(x)$$

$$(5.52) \quad x \frac{d}{dx} V(x) = A(x) V(x)$$

wobei die Matrizen A_0 und $A(x)$ folgendermaßen lauten

$$(5.53) \quad A(x) = \begin{pmatrix} 0 & \mu_2 \frac{x}{(1-x)^2} + \vartheta \frac{x}{1-x} \\ -\mu_1 \frac{x}{(1-x)^2} + \delta \frac{x}{1-x} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & \vartheta \\ 0 & 1-k \end{pmatrix}$$

Es ist sehr wichtig darauf zu achten, daß die Matrix $\frac{A(x)}{x}$ bzw. $\frac{1}{x} \{A_0 + A(x)\}$ keine Singulärstelle bzw. nur die Singulärstelle $x = 0$ innerhalb der Einheitskreise besitzt.

Nun suchen wir eine Transformation $P(x)$, die die Lösung von (5.52) in die Lösungen von (5.51) überführt. Sei also

$$(5.54) \quad F(x) = P(x) V(x)$$

dann wissen wir nach (2.30), daß $P(x)$ ($\det P(x) \neq 0$ in $(0; 1)$) folgende Matrix-D.Gl. erfüllt

$$(5.55) \quad x \frac{d}{dx} P(x) = \{A_0 + A(x)\} P(x) - P(x) A(x),$$

Diese wollen wir als Übergangsmatrix-D.Gl. bezeichnen.

Unser nächstes Ziel wird es also sein, eine Hauptmatrix von (5.55) zu bestimmen. Zu diesem Zweck sehen wir aus (5.53), daß $A(x)$ sich für $|x| < 1$ in Potenzen von x entwickeln läßt.

Aus den Entwicklungen

$$(5.56) \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n \quad |x| < 1$$

erhalten wir für $A(x)$

$$(5.57) \quad A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n, \quad |x| < 1, \quad \text{wobei}$$

$$(5.58) \quad A_n = \begin{pmatrix} 0 & \{n\mu_1 + \delta\} \\ \{-n\mu_1 + \delta\} & 0 \end{pmatrix} \quad (n \geq 1)$$

sind.

Damit läßt sich (5.55) für $|x| < 1$ auch folgendermaßen ausdrücken

$$(5.59) \quad x \frac{d}{dx} P(x) = (A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n) P(x) - P(x) \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n \right)$$

Nun wollen wir beweisen, daß sich die Lösungen von (5.59) aus den Lösungen folgender modifizierter Matrix-D.Gl.

$$(5.60) \quad x \frac{d}{dx} P(x; \beta) = \left(A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n \right) P(x; \beta) - P(x; \beta) \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n \right) + \beta^2 x^{\beta+1-k} I$$

durch einen bestimmten Grenzübergang gewinnen lassen, wobei β ein reeller Parameter ist, der innerhalb des Intervalls $[-\epsilon; \epsilon]$ (ϵ reell $1 \gg \epsilon > 0$) variieren darf, und I die Einheitsmatrix bedeutet.

Für $x \in (0; 1)$ machen wir für $P(x; \beta)$ den folgenden Ansatz

$$(5.61) \quad P(x; \beta) = \sum_{r=0}^{\infty} \beta P_r(\beta) x^{\beta+1-k+r}$$

und setzen (5.61) in (5.60) ein. Dann setzen wir die Koeffizienten der gleichen Potenzen x rechts und links gleich. Damit gewinnen wir folgende Rekursion für die Matrizen $P_r(\beta)$

$$(5.62) \quad \begin{cases} \{(\beta+1-k)I - A_0\} P_0(\beta) = \beta I & r=0 \\ \{(\beta+1-k+r)I - A_0\} P_r(\beta) = \sum_{s=0}^{r-1} [A_{r-s}; P_s(\beta)] & r \geq 1 \end{cases}$$

Wir $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gilt

$$(5.63) \quad A_0^2 = (1-k)A_0.$$

Damit erhalten wir

$$(5.64) \quad \{(\beta+r)I + A_0\} \{(\beta+1-k+r)I - A_0\} = \\ (\beta+r)(\beta+1-k+r)I - (\beta+r)A_0 + (\beta+r)A_0 + (1-k)A_0 - (1-k)A_0.$$

Nehmen wir nun an, daß $\beta \neq 0$ sei. Dann erhalten wir aus (5.64)

$$(5.65) \quad \{(\beta+1-k+r)I - A_0\}^{-1} = \frac{1}{(\beta+r)(\beta+1-k+r)} \{(\beta+r)I + A_0\}$$

Jede Matrix besitzt also eine Inverse.

Dementsprechend erhalten wir aus (5.62)

$$(5.66) \quad \mathcal{P}_0(\beta) = \frac{1}{\beta+1-k} \{ \beta I + A_0 \} \\ \mathcal{P}_r(\beta) = \frac{1}{(\beta+r)(\beta+1-k+r)} \{ (\beta+r)I + A_0 \} \left(\sum_{s=0}^{r-1} [A_{rs}; \mathcal{P}_s(\beta)] \right) \quad (r \geq 1)$$

Damit ist klar:

1. $\mathcal{P}_r(\beta)$ ($r \geq 0$) läßt sich aus (5.66) eindeutig bestimmen

2. $\beta \mathcal{P}_r(\beta)$ ist eine wohldefinierte Funktion von

$\beta \in [-\epsilon, \epsilon]$, $\beta = 0$ eingeschlossen, für jedes

Ferner sind alle diese Funktionen $\beta \mathcal{P}_r(\beta)$, $r \geq 0$; $\beta \in [-\epsilon, \epsilon]$ in diesem Intervall sogar in β analytisch. Dementsprechend stellt (5.61), das sich auch so schreiben läßt

$$(5.67) \quad \mathcal{P}(x; \beta) = \sum_{r=0}^{k-1} \beta \mathcal{P}_r(\beta) x^{\beta+1-k+r} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta \mathcal{P}_{k+\nu}(\beta) x^{\beta+1+\nu}$$

mindestens eine formale Lösung von (5.60) dar.

Nun ist (5.67) eine wirkliche Lösung von (5.60), wenn die Reihe

$$(5.68) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} |\beta \mathcal{P}_{k+\nu}(\beta)| x^{\beta+1+\nu} ; \quad \forall \beta \in [-\epsilon, \epsilon]$$

konvergiert.

Hilfssatz 5-2: Sei $R = 1-k$, ein reeller Parameter mit x_0 positiv und beliebig klein. Dann konvergiert die Reihe (5.68), wobei $\mathcal{P}_{k,\nu}(\beta)$ (5.56) angegeben ist, absolut in jedem Intervall $x \in [0; R]$ und gleichmäßig in β , $\beta \in [-\epsilon; \epsilon]$

Beweis: Aus (5.66) mit $r = k + \nu$ erhalten wir in der Tat

$$|\beta \mathcal{P}_{k+\nu}(\beta)| \leq \frac{|\beta + k + \nu| + |A_0|}{|\beta + k + \nu| |\beta + 1 + \nu|} \cdot 2 \sum_{s=0}^{k+\nu-1} |A_{k+\nu-s}| |\beta \mathcal{P}_s(\beta)|$$

oder

$$(5.69) \quad |\beta \mathcal{P}_{k+\nu}(\beta)| \leq \frac{2(1 + |A_0|)}{|\beta + 1 + \nu|} \cdot \sum_{s=0}^{k+\nu-1} |A_{k+\nu-s}| |\beta \mathcal{P}_s(\beta)|$$

Ferner erhalten wir aus der absoluten Konvergenz der Reihe

$$\sum_{r=1}^{\infty} A_r x^r \quad \text{für } x = R < 1,$$

daß es eine Konstante $M(R)$ gibt, so daß

$$(5.70) \quad |A_r| \leq \frac{M(R)}{R^r} \quad (r \geq 1)$$

gilt; denn aus $\sum_{r=1}^{\infty} |A_r| R^r = M(R)$ folgt (5.70).

Dementsprechend erhalten wir aus (5.69) und 5.70)

$$(5.71) \quad |\beta \mathcal{P}_{k+\nu}(\beta)| \leq \frac{2(1 + |A_0|)}{|\beta + 1 + \nu|} M(R) \sum_{s=0}^{k+\nu-1} \frac{|\beta \mathcal{P}_s(\beta)|}{R^{k+\nu-s}} \quad (\nu \geq 0)$$

Damit können wir die folgende Folge definieren:

$$(5.72) \quad Q_{k+\nu}(\beta) = \frac{2(1 + |A_0|)}{|\beta + 1 + \nu|} M(R) \sum_{s=0}^{k+\nu-1} \frac{|\beta \mathcal{P}_s(\beta)|}{R^{k+\nu-s}} \quad (\nu \geq 0)$$

Nach Definition gilt

$$(5.73) \quad Q_{k+\nu}(\beta) \geq |\beta \mathcal{P}_s(\beta)| \quad (\nu \geq 0)$$

Wir erhalten

$$(5.74) \quad \left\{ \begin{aligned} Q_{k+\nu+1}(\beta) &= \frac{2(1 + |A_0|)}{|\beta + 1 + \nu + 1|} M(R) \sum_{s=0}^{k+\nu} \frac{|\beta \mathcal{P}_s(\beta)|}{R^{k+\nu+1-s}} = \\ &= \frac{2(1 + |A_0|)}{|\beta + 1 + \nu + 1|} \cdot \frac{M(R)}{R} |\beta \mathcal{P}_{k+\nu}(\beta)| + \frac{|\beta + 1 + \nu|}{|\beta + 1 + \nu + 1|} \cdot \frac{1}{R} Q_{k+\nu} \end{aligned} \right.$$

Folglich gilt wegen (5.73)

$$(5.75) \quad \frac{Q_{k+\nu+1}(\beta)}{Q_{k+\nu}(\beta)} \leq \frac{2(1 + |A_0|)}{|\beta + 1 + \nu + 1|} \cdot \frac{M(R)}{R} + \frac{|\beta + 1 + \nu|}{|\beta + 1 + \nu + 1|} \cdot \frac{1}{R}$$

Nun können wir wieder eine neue Folge folgendermaßen definieren:

$$(5.76) \quad \frac{T_{k+\nu+1}(\beta)}{T_{k+\nu}(\beta)} = \frac{2(1 + |A_0|)}{|\beta + 1 + \nu + 1|} \cdot \frac{M(R)}{R} + \frac{|\beta + 1 + \nu|}{|\beta + 1 + \nu + 1|} \cdot \frac{1}{R}$$

mit $T_k(\beta) = Q_k(\beta)$

Damit ist wieder klar, daß

$$(5.77) \quad T_{k+\nu}(\beta) \geq Q_{k+\nu}(\beta) \geq |\beta P_{k+\nu}(\beta)|$$

gilt. Aber wir erhalten

$$(5.78) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{2(1+|\beta_0|)}{|\beta+1+\nu+1|} \frac{M(R)}{R} = 0 \quad \forall \beta \in [-\epsilon; \epsilon]$$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{|\beta+1+\nu|}{|\beta+1+\nu+1|} \frac{1}{R} = \frac{1}{R}; \quad \forall \beta \in [-\epsilon; \epsilon]$$

Daraus folgt

$$(5.79) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{T_{k+\nu+1}(\beta)}{T_{k+\nu}(\beta)} = \frac{1}{R}; \quad \forall \beta \in [-\epsilon; \epsilon]$$

Das besagt, daß die Reihe

$$(5.80) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} T_{k+\nu}(\beta) x^{\lambda+1+\nu}$$

für jedes Intervall $[0, R)$ und zwar gleichmäßig in β ; $\beta \in [-\epsilon; \epsilon]$ konvergiert.

Aber (5.80) ist nach (5.77) eine Majorante von (5.68). Daraus folgt die gleiche Aussage für die Reihe

Nun ist aber R der Gestalt $R = 1 - \kappa_0$

mit κ_0 reell positiv und beliebig klein. Daraus folgt, daß die Reihe

$$(5.81) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta P_{k+\nu}(\beta) x^{\lambda+1+\nu}$$

für jedes $x \in (0, 1)$ absolut und gleichmäßig in β ; $(\beta \in [-\epsilon; \epsilon])$ konvergiert.

Dementsprechend stellt (5.67) tatsächlich eine Lösung von (5.60) für jedes $x \in (0, 1)$ dar.

Ferner ist (5.81) eine gleichmäßig konvergente Reihe von analytischen Funktionen. Folglich ist $\mathcal{P}(x, \beta)$ in (5.67) analytisch in x und β ; $x \in (0, 1)$; $\beta \in [-\epsilon; \epsilon]$ und man darf das zweite Glied in (5.67) gliedweise und beliebig oft nach β und nach x differenzieren.

Nun wollen wir die Operatoren $\frac{d}{dx}$ und $\frac{\partial}{\partial \beta}$ vertauschen, so daß

$$(5.82) \quad \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{d}{dx} \mathcal{P}(x, \beta) = \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial \beta} \mathcal{P}(x, \beta) \quad \text{in} \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta \in [-\epsilon; \epsilon] \\ x \in (0, 1) \end{array} \right\}$$

gilt. Damit erhalten wir aus (5.60) durch Differentiation nach β wegen (5.82)

$$(5.83) \quad \left\{ \begin{aligned} x \frac{d}{dx} \left\{ \frac{\partial \mathcal{P}(x; \beta)}{\partial \beta} \right\} &= (A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n) \left\{ \frac{\partial \mathcal{P}(x; \beta)}{\partial \beta} \right\} \\ &- \left\{ \frac{\partial \mathcal{P}(x; \beta)}{\partial \beta} \right\} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n \right) + (2\beta x^{\beta+1-k} + \beta^2 \mathcal{L}_1 x^{\beta+1-k}) I \end{aligned} \right.$$

Wenn nun $\beta \rightarrow 0$ strebt, erhalten wir aus (5.83)

$$(5.84) \quad x \frac{d}{dx} \left\{ \frac{\partial \mathcal{P}(x; \beta)}{\partial \beta} \right\}_{\beta=0} = (A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n) \left\{ \frac{\partial \mathcal{P}(x; \beta)}{\partial \beta} \right\}_{\beta=0} - \left\{ \frac{\partial \mathcal{P}(x; \beta)}{\partial \beta} \right\}_{\beta=0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n \right)$$

Folglich ist

$$(5.85) \quad \mathcal{P}^{(0)}(x) = \left\{ \frac{\partial \mathcal{P}(x; \beta)}{\partial \beta} \right\}_{\beta=0} \quad x \in (0; 1)$$

eine Lösung der Übergangsmatrix-D.Gl. (5.55), wobei $\mathcal{P}(x; \beta)$ in (5.67) gegeben ist.

§ 5.4 Analytische Struktur der Hauptmatrix $\mathcal{P}^{(0)}(x)$

Sei also $\mathcal{P}_0(x) = \left\{ \frac{\partial \mathcal{P}(x; \beta)}{\partial \beta} \right\}_{\beta=0}$
dann erhalten wir aus (2.67)

$$(5.86) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{P}_0(x) &= \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \beta \mathcal{P}_r(\beta) x^\beta \right\} x^{1-k+r} + \\ &+ \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \beta \mathcal{P}_{k+\nu}(\beta) x^\beta \right\} x^{1+\nu} = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \mathcal{P}_r(0) x^{1-k+r} + \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \beta \mathcal{P}_{k-1}(\beta) \right\}_{\beta=0} + \mathcal{L}_1 x \left\{ \beta \mathcal{P}_{k-1}(\beta) \right\}_{\beta=0} \\ &+ \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \beta \mathcal{P}_{k+\nu}(\beta) \right\}_{\beta=0} x^{1+\nu} + \mathcal{L}_1 x \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \beta \mathcal{P}_{k+\nu}(\beta) \right\}_{\beta=0} x^{1+\nu} \end{aligned} \right.$$

Nun führen wir folgende Matrizen ein:

$$(5.87) \quad \left\{ \begin{aligned} R_n &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \beta \mathcal{P}_{k-1+n}(\beta) \right\}_{\beta=0} \\ S_n &= \left\{ \beta \mathcal{P}_{k-1+n}(\beta) \right\}_{\beta=0} \end{aligned} \right. \quad (n=0, 1, \dots)$$

Damit erhalten wir aus (5.86)

$$(5.88) \quad \mathcal{I}^{(0)}(x) = \sum_{r=0}^{k-2} \mathcal{P}_r(0) x^{1-k+r} + \sum_{n=0}^{\infty} R_n x^n + \ln x \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$$

$x \in (0, 1)$

Für $k=1$ entfällt die endliche Summe.

Sei zuerst $k \geq 2$, dann erhalten wir

$$(5.89) \quad \begin{cases} \lim_{\beta \rightarrow 0} \{\beta \mathcal{P}_1(\beta)\} = 0 & k \leq k-2 \\ \lim_{\beta \rightarrow 0} \{\beta \mathcal{P}_{k-1}(\beta)\} = S_0 = \frac{1}{k-1} \{(k-1)I + A_0\} \cdot \left(\sum_{s=0}^{k-2} [A_{k-1-s}; \mathcal{P}_s(0)] \right) \end{cases}$$

und aus

$$(5.90) \quad \begin{cases} \beta \mathcal{P}_{k-1+n}(\beta) = \frac{1}{(\beta+k-1+n)(\beta+n)} \cdot \{(\beta+k-1+n)I + A_0 \} \cdot \\ \cdot \left(\sum_{s=0}^{k-2} [A_{k-1+n+s}; \beta \mathcal{P}_s(\beta)] + \sum_{s=0}^{n-1} [A_{n-s}; \beta \mathcal{P}_{k-1+s}(\beta)] \right) \end{cases}$$

erhalten wir

$$(4.91) \quad \begin{cases} \lim_{\beta \rightarrow 0} \{\beta \mathcal{P}_{k-1+n}(\beta)\} = S_n = \frac{1}{(k-1+n)n} \{(k-1+n)I + A_0\} \cdot \\ \cdot \left(\sum_{s=0}^{n-1} [A_{n-s}; S_s] \right) \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

und andererseits

$$(5.92) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} \{\beta \mathcal{P}_1(\beta)\}_{\beta=0} &= R_0 = -\frac{A_0}{(k-1)}, \cdot \left(\sum_{s=0}^{k-2} [A_{k-1-s}; \mathcal{P}_s(0)] \right) \\ &+ \frac{1}{k-1} \{(k-1)I + A_0\} \cdot \left(\sum_{s=0}^{k-2} [A_{k-1-s}; Q_s] \right) \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

wobei $Q_s = \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta} \mathcal{P}_s(\beta) \right\}_{\beta=0}$ $s \leq k-2$ sind.

$$(5.93) \quad \begin{cases} R_n = \frac{\partial}{\partial \beta} \{\beta \mathcal{P}_{k-1+n}(\beta)\}_{\beta=0} = -\frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} I + \frac{1}{(k-1+n)^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{(k-1+n)n} \{A_0\} \cdot \left(\sum_{s=0}^{n-1} [A_{n-s}; S_s] \right) + \frac{1}{(k-1+n)n} \{(k-1+n)I + A_0\} \cdot \right. \\ \left. \cdot \left(\sum_{s=0}^{k-2} [A_{k-1+n-s}; Q_s] + \sum_{s=0}^{n-1} [A_{n-s}; R_s] \right) \right) \end{cases}$$

Sei nun $k = 1$, dann erhalten wir

$$(5.94) \quad \left\{ \begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow 0} \{ \beta \mathcal{P}_0(\beta) \} &= A_0 \\ \lim_{\beta \rightarrow 0} \{ \beta \mathcal{P}_n(\beta) \} &= S_n = \frac{1}{n^2} \{ nI + A_0 \} \cdot \left(\sum_{s=0}^{n-1} [A_{n-s}; S_s] \right) \\ &\quad (n \geq 1) \end{aligned} \right.$$

$$(5.95) \quad R_0 = \frac{\partial}{\partial \beta} \{ \beta \mathcal{P}_0(\beta) \}_{\beta=0} = I$$

$$(5.96) \quad \left\{ \begin{aligned} R_n &= \frac{\partial}{\partial \beta} \{ \beta \mathcal{P}_n(\beta) \}_{\beta=0} = - \frac{1}{n^2} \{ I + \frac{2}{n} A_0 \} \cdot \\ &\cdot \left(\sum_{s=0}^{n-1} [A_{n-s}; S_s] + \frac{1}{n^2} \{ nI + A_0 \} \cdot \left(\sum_{s=0}^{n-1} [A_{n-s}; R_s] \right) \right) \end{aligned} \right.$$

Wir können alle diese Ergebnisse folgendermaßen zusammenfassen:

1. Sei $k \geq 2$. Dann erhalten wir für

$$(5.97) \quad \mathcal{P}^{(k)}(x) = \sum_{r=0}^{k-2} \mathcal{P}_r(0) x^{1-k+r} + \sum_{n=0}^{\infty} R_n x^n + \text{dx} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$$

$$x = \frac{2}{2+1} \quad ; \quad \mathcal{P}(0) = \frac{1}{1-k} A_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{1-k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wobei die S_n bzw. die R_n folgende Rekursion erfüllen

$$(5.98) \quad \left\{ \begin{aligned} S_n &= \frac{1}{(k-1+n)A} \{ (k-1+n)I + A_0 \} \cdot \left(\sum_{s=0}^{n-1} [A_{k-1-s}; S_s] \right) \\ S_0 &= \frac{1}{k-1} \{ (k-1)I + A_0 \} \cdot \left(\sum_{s=0}^{k-2} [A_{k-1-s}; \mathcal{P}_s(0)] \right) \end{aligned} \right.$$

bzw.

$$(5.99) \quad \left\{ \begin{aligned} R_n &= - \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} I + \left\{ \frac{1}{(k-1+n)^2} + \frac{1}{(k-1+n)n} \right\} A_0 \right) \cdot \\ &\left(\sum_{s=0}^{n-1} [A_{k-1-s}; S_s] \right) + \frac{1}{(k-1+n)n} \{ (k-1+n)I + A_0 \} \cdot \\ &\cdot \left(\sum_{s=0}^{k-2} [A_{k-1+n-s}; \mathcal{P}_s] + \sum_{s=0}^{n-1} [A_{k-1-s}; R_s] \right) \end{aligned} \right.$$

mit

$$\mathcal{Q}_s = \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta} \mathcal{P}_s(\beta) \right\}_{\beta=0} \quad s \leq k-2.$$

2. Sei $k = 1$. Dann erhalten wir für $P^{(0)}(x)$

$$(5.100) \quad P^{(0)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n x^n + \frac{1}{2} x \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n \quad \left(x = \frac{z}{2+1}\right)$$

wobei die S_n bzw. die R_n folgende Rekursion erfüllen:

$$(5.101) \quad \begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n^2} \{ nI + A_0 \} \cdot \left(\sum_{s=0}^{n-1} [A_{n-s}; S_s] \right) \quad (n \geq 1) \\ \text{mit} \quad S_0 &= A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bzw.

$$(5.102) \quad \left\{ \begin{aligned} R_n &= -\frac{1}{n^2} \left\{ I + \frac{2}{n} A_0 \right\} \cdot \left(\sum_{s=0}^{n-1} [A_{n-s}; S_s] \right) + \\ &+ \frac{1}{n} \left\{ nI + A_0 \right\} \cdot \left(\sum_{s=0}^{n-1} [A_{n-s}; R_s] \right) \quad ; \quad R_0 = I \end{aligned} \right.$$

Nun ist hier anzumerken: Wenn $k = 1$ und $\xi = 0$ ist, d.h. wenn $A_0 = 0$ in (5.101) ist, dann sind alle $S_n = 0$ ($n \geq 0$) und alle $R_n = 0$ ($n \geq 1$) und $R_0 = I$. Dementsprechend reduziert sich $P^{(0)}(x)$ in diesem Fall zu der Einheitsmatrix. Schließlich kann man relativ einfach sehen, daß die so erhaltene Lösung $P^{(0)}(x)$ der Übergangsmatrix-D.Gl. (5.55) eine Hauptmatrix ist. Wir wissen nämlich (s. Hilfssatz 2-3 in § 2.3), daß die Determinante von $P^{(0)}(x)$ in $x \in (0, 1)$ entweder nie Null ist oder identisch verschwindet.

In dem zweiten Fall wären die beiden Spalten von $P^{(0)}(x)$ zueinander proportional, was nicht der Fall ist. Daraus folgt also, daß $P^{(0)}(x)$ eine Hauptmatrix ist, d.h. $P^{(0)}(x)$ besitzt eine Inverse in $x \in (0, \infty)$.

§ 5.5 Bestimmung einer Hauptmatrix der Grund-Matrix-D.Gl. (5.83), deren erste Spalte eine Lösung des Grund-D.Gl. Systems ist, die die Anfangsbedingungen erfüllt.

Nun nehmen wir einerseits die in § 5.4 bestimmte Matrix $P^{(0)}(x)$ und andererseits die Hauptmatrix der reduzierten Matrix-D.Gl., die in Kapitel 3 für die verschiedenen Quadranten mit $V^{(0)}\left(\frac{1}{1-x}\right)$ bezeichnet wurde.

Damit erhalten wir nach (5.54), daß

$$(5.103) \quad \left\{ \begin{aligned} F(x) &= P^{(0)}(x) V^{(0)}\left(\frac{1}{1-x}\right) \\ x &= \frac{1}{2+1} \end{aligned} \right.$$

eine Hauptmatrix der Grund-Matrix-D.Gl. (5.33) ist.

Ferner ist $V^{(0)}\left(\frac{1}{1-x}\right)$ analytisch in $x = 0$, folglich besitzt die Konstantenmatrix $V^{(0)}(1)$ eine Inverse. Dementsprechend ist

$$(5.104) \quad F^{(0)}(x) = P^{(0)}(x) V^{(0)}\left(\frac{1}{1-x}\right) (V^{(0)}(1))^{-1}$$

wieder eine Hauptmatrix von (5.33).

Nun entwickeln wir $V^{(0)}\left(\frac{1}{1-x}\right) (V^{(0)}(1))^{-1}$ in Potenzen von x und führen die in (3.104) stehende Multiplikation durch. So erhalten wir

1. für $k \geq 2$

$$(5.105) \quad F^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1-k} + \mu x \sum_{n=0}^{\infty} D_n x^n ; \quad x \in (0; 1)$$

mit

$$(5.106) \quad C_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{1-k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. für $k = 1$

$$(5.107) \quad F^{(1)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n + \mu x \sum_{n=0}^{\infty} D_n x^n$$

$x \in (0; 1)$

mit

$$(5.108) \quad C_0 = I$$

Damit erhalten wir nach dem Hilfssatz 5-1, daß die erste Spalte der Hauptmatrix

$F^{(k)}(x)$ eine analytische Lösung des Grund-D.Gl.Systems (2.1) ist. Diese Spalte besteht aus Funktionen, die absolut im Intervall $(-1; 1)$ konvergieren.

Wir können diese Resultate in der 2 Veränderlichen folgendermaßen zusammenfassen:

1. Die Matrix

$$(5.109) \quad F^{(0)}(z) = P^{(0)}\left(\frac{z}{z+1}\right) V^{(0)}(z+1) (V^{(0)}(1))^{-1}$$

$z \in (0; \infty)$

ist eine Hauptmatrix von (5.33).

2. Diese Matrix nimmt für $k \geq 2$ bzw. $k = 1$ folgende Gestalt an

a) $k \geq 2$

$$(5.110) \quad F^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\frac{z}{z+1}\right)^{n+1-k} + \mu \frac{z}{z+1} \sum_{n=0}^{\infty} D_n \left(\frac{z}{z+1}\right)^n$$

b) $k = 1$

$$(5.111) \quad F^{(1)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\frac{z}{z+1}\right)^n + \mu \frac{z}{z+1} \sum_{n=0}^{\infty} D_n \left(\frac{z}{z+1}\right)^n,$$

wobei C_0 in (5.110) bzw. (5.111) in (5.106) bzw. (5.108) gegeben ist.

3. Die erste Spalte von $F^{(0)}/\lambda$ besteht aus analytischen Funktionen der Gestalt

$$(5.112) \quad \begin{pmatrix} f_{1,1}^{(0)}/\lambda \\ f_{2,1}^{(0)}/\lambda \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} c_{n+k-1}^{(1)} \\ c_{n+k-1}^{(2)} \end{pmatrix} \left(\frac{\lambda}{2+1} \right)^n \quad (c_{k-1}^{(2)} = 0)$$

die eine analytische Lösung des Grund-D.Gl.Systems (2.1) darstellen, die die gesuchten Randbedingungen bei $\lambda = 0$ erfüllen und die in $\lambda \in (-1/2; \infty)$ absolut konvergieren.

6. Analytische Struktur des Grund-D.Gl.Systems bei $\lambda = \infty$: Ausschluß von Eigenwerten

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der analytischen Struktur der Lösungen des Grund-D.Gl.Systems (2.1) bei der wesentlichen Singulärstelle. Wir führen die Übergangsmatrix $\hat{P}^{(0)}/\lambda$ ein und bestimmen ihre asymptotische Darstellung in $\lambda = \infty$. Damit lassen sich bestimmte Aussagen über den Ausschluß von Eigenwerten beweisen.

§ 6.1 Analytische Struktur der Lösungen des Grund-D.Gl.Systems bei der wesentlichen Singulärstelle $\lambda = \infty$:

Betrachten wir die zu dem Grund-D.Gl.System (2.1) gleichwertige Matrix-D.Gl.

$$(6.1) \quad \frac{dF}{d\lambda} = \begin{pmatrix} 0 & \mu_2 + \frac{\delta}{\lambda-1} \\ -\mu_1 + \frac{\delta}{\lambda} & \frac{1-k}{\lambda(\lambda-1)} \end{pmatrix} F = A(\lambda) F$$

mit

$$(6.2) \quad \begin{cases} \xi = \lambda + 1 \\ \delta = \mu_2 - \frac{\alpha}{2} \\ \delta = \frac{\alpha}{2} + \mu_1 \end{cases}$$

Wir sehen, daß die Koeffizientenmatrix $A(\lambda)$ sich für $|\lambda| < 1$ in eine absolut konvergente Reihe negativer Potenzen von ξ entwickeln läßt, so daß gilt

$$(6.3) \quad \frac{d}{d\xi} F(\lambda) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n \xi^{-n} \right) F(\lambda)$$

mit

$$(6.4) \quad \begin{cases} A_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mu_1 \\ -\mu_1 & 0 \end{pmatrix} \\ A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \delta \\ \delta & c \end{pmatrix} \\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \delta \end{pmatrix} \end{cases}$$

Es ist wichtig zu bemerken, daß die charakteristische Wurzel

$$(6.5) \quad \begin{cases} \lambda_1 = - \{ -\mu_1 \mu_2 \}^{1/2} \\ \lambda_2 = + \{ -\mu_1 \mu_2 \}^{1/2} \end{cases}$$

der konstanten Matrix A_0 verschieden von Null und untereinander verschieden ist, solange $\mu_1 \neq 0$ und $\mu_2 \neq 0$ ist.

Jetzt können wir folgenden sehr wichtigen Hilfssatz [23] zur Bestimmung der analytischen Struktur der Lösungen von (6.3) anwenden.

Hilfssatz 6-1:

Es möge folgende lineare Matrix-D.Gl.

$$(6.6) \quad \frac{d}{d\xi} \vec{\phi}(\xi) = \xi^r A(\xi) \vec{\phi}(\xi)$$

betrachtet werden, wobei sich die Koeffizientenmatrix $A(\xi)$ in einer Umgebung von $\xi = \infty$ als konvergente Potenzreihe negativer Potenzen in ξ folgendermaßen entwickeln läßt:

$$(6.7) \quad A(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \xi^{-n}$$

Ferner setzen wir voraus, daß die charakteristischen Wurzeln $\lambda_1 \dots \lambda_n$ von $A_0 \neq 0$ untereinander verschieden sind. Dann besitzt die Matrix-D.Gl. (6.6) eine Hauptmatrix der Gestalt

$$(6.8) \quad \vec{\phi}(\xi) = \vec{\hat{\phi}}(\xi) \vec{D} e^{Q(\xi)}$$

wobei $\vec{D}$ eine konstante Diagonalmatrix mit komplexen Elementen und $Q(\xi)$ eine Polynommatrix der Gestalt

$$(6.9) \quad Q(\xi) = \frac{\xi^{r+1}}{r+1} Q_0 + \frac{\xi^r}{r} Q_1 + \dots + \xi Q_r$$

mit

$$(6.10) \quad Q_0 \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_r \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

ist. Die Matrix $\vec{\hat{\phi}}(\xi)$ besitzt die asymptotische Darstellung

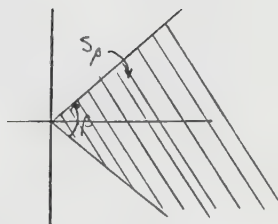
$$(6.11) \quad \vec{\hat{\phi}}(\xi) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \vec{\hat{\phi}}_n \xi^{-n} \quad (\det \vec{\hat{\phi}}_0 \neq 0)$$

in einem geeigneten Bereich S der $\mathbb{R}$ -Ebene.
Ist $A(\xi)$ in (6.7) bei $\xi = \infty$ holomorph, dann
gilt (6.8) mindestens in jedem Winkelbereich S_β
(s. Abb. 6-1) mit dem Winkel $\beta < \frac{1}{r+1} \pi$.
Für die Matrix-D.Gl. (6.3) erhalten wir dann
($r=0$), daß es eine Hauptmatrix der Gestalt

$$(6.12) \quad F^{(1)}(\xi) = \hat{F}(\xi) \xi^D e^{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \xi}$$

gibt, wobei $\hat{F}(\xi)$ sich für große Werte von ξ
folgendermaßen entwickeln läßt:

$$(6.13) \quad \hat{F}(\xi) \sim \sum_{n=0}^{\infty} F_n \xi^{-n} \quad (\det F_0 \neq 0) \\ \xi \rightarrow \infty \quad (\forall S_\alpha \text{ mit } \alpha < \pi)$$



(Abb. 6-1)

Lemma 6-1: Setzen wir voraus, daß unsere Hauptmatrix $F^{(1)}(\xi)$ formal folgende Zer-
legung annimmt:

$$(6.14) \quad F^{(1)}(\xi) = P^{(1)}(\xi) V^{(1)}(\xi) \quad , \quad (\mu_1 \neq 0 ; \mu_2 \neq 0)$$

wobei wir wissen, daß

$$(6.15) \quad V^{(1)}(\xi) = \hat{V}^{(1)}(\xi) \xi^{D'} e^{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \xi}$$

mit

$$(6.16) \quad \hat{V}^{(1)}(\xi) \sim \sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(1)} \xi^{-n} \quad (\det V_0^{(1)} \neq 0) \\ \xi \rightarrow \infty \quad (\forall S_\alpha \text{ mit } \alpha < \pi)$$

gilt und daß $P^{(1)}(\xi)$ sich formal folgendermaßen darstellen läßt:

$$(6.17) \quad \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(1)} \xi^{-n}$$

Dann folgt aus (6.12) und (1.16), daß (6.17) entweder eine konvergente Reihe
in einer geeigneten Umgebung von $\xi = \infty$ darstellt oder mindestens eine asymp-
totische Darstellung besitzt. d.h. es gibt eine wirkliche Übergangsmatrix $\hat{P}^{(1)}(\xi)$,
die der Übergang von der $V^{(1)}(\xi)$ -Matrix zu der $F^{(1)}(\xi)$ -Matrix durch-
führt, so daß

$$(6.18) \quad \hat{P}^{(1)}(\xi) \sim \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(1)} \xi^{-n} \quad \text{gilt.} \\ \xi \rightarrow \infty \quad (\forall S_\alpha \text{ mit } \alpha < \pi)$$

Beweis:

Dann wäre

$$(6.19) \quad F^{(10)}(\xi) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(10)} \xi^{-n} \right) V^{(10)}(\xi)$$

eine formale Lösung von (6.3) der Gestalt

$$(6.20) \quad F^{(10)}(\xi) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(10)} \xi^{-n} \right) \hat{V}^{(10)}(\xi) \approx D' e^{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_r \end{pmatrix} \xi}$$

(D' diagonal)

Aber zu dieser formalen Lösung gibt es eine wirkliche Lösung [24], so daß

$$(6.21) \quad F^{(10)} = \hat{F}^{(10)}(\xi) \approx D' e^{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_r \end{pmatrix} \xi} \quad \text{mit}$$

$$(6.22) \quad \hat{F}^{(10)}(\xi) \sim \left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(10)} \xi^{-n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(10)} \xi^{-n} \right) \\ \xi \rightarrow \infty$$

Daraus folgt einerseits

$$D = D' \quad \text{in (6.12)}$$

und wegen $\det V_0^{(10)} \neq 0$ und dem asymptotischen Charakter von auch die Behauptung des Lemmas 6-1.

Wir haben oben ausdrücklich vorausgesetzt, daß $\mu_1 \neq 0$ und $\mu_r \neq 0$ sind, denn wenn eine der beiden Parameter μ_1 bzw. μ_r gleich Null ist, dann sind die Voraussetzungen des Hilfssatzes 6-1 nicht mehr erfüllt und folglich bleibt sowohl dieser Hilfssatz als auch das Lemma 6-1 nicht mehr gültig.

Im nächsten Paragraphen versuchen wir eine Zerlegung der Gestalt (6.19) zu finden. Dazu brauchen wir vorher einige Betrachtungen über folgende algebraische Matrix-Gleichung $A_0 P - P A_0 = Q$.

§ 6.2 Lösung der Matrix-Gleichung von der Gestalt $A_0 P - P A_0 = Q$ mit $A_0^2 = I$

Wenn in der Gleichung $A P - P B = 0$ mit 2×2 -Matrizen die Matrix A und B mindestens einen gemeinsamen Eigenwert besitzen, dann hat diese Gleichung sicher eine nicht triviale Lösung. [25]. Offenbar ist das immer dann der Fall, wenn $A \equiv B$ ist. Folglich besitzt die Matrix-Gleichung

$$(6.23) \quad A_0 P - P A_0 = Q$$

nicht immer eine Lösung.

Wir wollen sehen, unter welchen Bedingungen (6.23) eine Lösung besitzt. Es ergibt sich hieraus, daß (6.23) in diesem Fall sogar eine zweiparametrische Schar von Lösungen hat.

Hilfssatz 6-2: Sei in (6.23) A_0 eine Matrix mit der Eigenschaft $A_0^2 = I$. Dann lautet die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß (6.23) mindestens eine Lösung besitzt,

$$(6.24) \quad A_0 Q + Q A_0 = \{A_0, Q\}^+ = 0$$

Beweis: Daß diese Bedingung notwendig ist, läßt sich relativ einfach erkennen. Setzen wir voraus, daß $P = P_0$ eine Lösung von (6.23) ist, dann gilt

$$(6.25) \quad A_0 P_0 - P_0 A_0 = Q$$

und damit auch wegen der Eigenschaft $A_0^2 = I$

$$(6.26) \quad \begin{cases} P_0 - A_0 P_0 A_0 = A_0 Q \\ A_0 P_0 A_0 - P_0 = Q A_0 \end{cases}$$

Daraus folgt $A_0 Q + Q A_0 = 0$ so daß die Bedingung (6.24) notwendig ist.

Nun wollen wir beweisen, daß die Bedingung auch hinreichend ist. Wenn die Matrizen A_0 und Q in (6.23) die Bedingung (6.24) erfüllen, dann ist

$$(6.27) \quad P_0 = \frac{1}{2} A_0 Q$$

wegen $A_0^2 = I$ eine Lösung von (6.23) (w.z.b.w.)

Ferner sind in diesem Fall mit P_0

$$(6.28) \quad P = \lambda_0 I + \lambda_1 A_0 + \frac{1}{2} A_0 Q$$

(λ_1 und λ_2 beliebige Parameter) auch Lösungen von (6.23). Nun wollen wir beweisen, daß (6.28) die allgemeine Lösung von (6.23) ist, d.h.: Jede Lösung von (6.23) läßt sich in einer eindeutigen Weise mit bestimmten Werten der Parameter λ_0, λ_1 in der Gestalt (6.28) ausdrücken.

Sei nun P die allgemeine Lösung von (6.23) und P_0 die Sonderlösung (6.27), dann gilt

$$(6.29) \quad A_0 X - X A_0 = 0$$

mit

$$(6.30) \quad X = P - P_0$$

Offenbar sind die Matrizen

$$(6.31) \quad X = \lambda_0 I + \lambda_1 A_0$$

mit λ_0, λ_1 beliebige Parameter Lösungen von (6.29). Aber aus

$$(6.32) \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = 0$$

erhalten wir

$$(6.33) \quad \begin{cases} a_3 x_3 - a_3 x_4 = 0 \\ a_2 x_1 + (a_4 - a_1) x_2 - a_2 x_4 = 0 \\ a_3 x_1 + (a_4 - a_1) x_3 - a_3 x_4 = 0 \end{cases}$$

Davon sind nur die Gleichungen

$$(6.34) \quad \begin{cases} a_2 x_3 - a_3 x_4 = 0 \\ a_3 x_1 - (a_4 - a_1) x_3 - a_3 x_4 = 0 \end{cases}$$

linear unabhängig. Daraus folgt, daß (6.31) die allgemeine Lösung von (6.29) ist. Dementsprechend ergibt sich aus (6.31) und (6.30), daß (6.28) die allgemeine Lösung von (6.23) ist.

In der praktischen Behandlung brauchen wir die Bedingung (6.24) durch andere gleichwertige Bedingungen zu ersetzen, die günstiger für unser Ziel sind. Dazu wollen wir folgenden Hilfssatz formulieren:

Hilfssatz 6-3: Die Bedingung (6.24) und

$$(6.35) \quad \begin{cases} \langle p, \lambda \rangle = 0 \\ \langle p, \lambda \rangle = 0 \end{cases}$$

sind zueinander gleichwertig, d.h. die eine ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die andere und umgekehrt.

Beweis:

Aus (6.24) folgt

$$(6.36) \quad Q = -A_0^{-1}QA_0$$

und dementsprechend

$$\text{Sp}\{Q\} = -\text{Sp}\{A_0^{-1}QA_0\} = -\text{Sp}\{Q\}$$

also

$$(6.37) \quad \text{Sp}\{Q\} = 0$$

Andererseits folgt aus (6.24)

$$(6.38) \quad \text{Sp}\{A_0Q\} + \text{Sp}\{QA_0\} = 0$$

Nun ist aber

$$(6.39) \quad \text{Sp}\{A_0Q\} = \text{Sp}\{QA_0\}$$

Damit folgt aus (6.38)

$$(6.40) \quad \text{Sp}\{A_0Q\} = \text{Sp}\{QA_0\} = 0 \quad \text{wenn also}$$

$A_0Q + QA_0 = 0$. Dann ist auch

$$(6.41) \quad \begin{cases} \text{Sp}(Q) = 0 \\ \text{Sp}(A_0Q) = 0 \end{cases}$$

Nun setzen wir voraus, daß (6.41) gilt. Dann wollen wir beweisen, daß auch (6.34) gelten muß.

Wäre dies nicht so, dann gäbe es eine Matrix $S \neq 0$, so daß

$$(6.42) \quad A_0S + SA_0 = S$$

wäre. Aber aus (6.42) und der Eigenschaft $A_0^2 = I$ folgt

$$(6.43) \quad A_0S - SA_0 = 0$$

Dementsprechend muß S notwendigerweise folgende Gestalt annehmen:

$$(6.44) \quad S = \lambda_0 I + \lambda_1 A_0$$

mit bestimmten Werten der Parameter λ_0 und λ_1 .

Nun folgt aus (6.40) und der Voraussetzung (6.41) wegen (6.42)

$$(6.45) \quad \begin{cases} Sp(S) = 0 \\ Sp(A_0 S) = 0 \end{cases},$$

wobei die Eigenschaft $A_0 = A_0^{-1}$ benutzt worden war. Aus

$$(6.46) \quad A_0^2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}^2 = I$$

erhalten wir andererseits

$$(6.47) \quad \begin{cases} a_1^2 + a_2 a_3 = 1 \\ a_2(a_1 + a_4) = 0 \\ a_3(a_1 + a_4) = 0 \\ a_4 + a_2 a_3 = 1 \end{cases}$$

Dann erhalten wir entweder $Sp(A_0) = 0$ oder $A_0 = \pm I$

In dem zweiten Fall folgt aus der Bedingung $Sp(S) = 0$ unmittelbar nach (6.44), daß $S = 0$ ist. In dem ersten Fall folgt nach (6.44) aus der Bedingung $Sp(S) = 0$, daß $\lambda_0 = 0$ ist. Dementsprechend gilt

$$(6.48) \quad S = \lambda_1 A_0.$$

Aber dann erhalten wir nach (6.48) aus der Voraussetzung $Sp\{A_0 Q\} = 0$ $\lambda_1 = 0$ und folglich $S = 0$. Also ist S gleich Null in jedem Fall. Wir haben erhalten, daß die Voraussetzung $S \neq 0$ zu einem Widerspruch führt und dementsprechend ist $S = 0$. Das bedeutet aber, daß $A_0 Q + Q A_0 = 0$ ist, wenn die Bedingungen (6.41) gültig sind und umgekehrt (w.z.b.w.)

§ 6.3 Asymptotische Struktur der Übergangsmatrix $\hat{P}^{(c)}(\lambda, t)$ im Quadranten $\mu_1 < 0, \mu_2 > 0$ bzw. $\mu_1 > 0, \mu_2 < 0$.

In § 5.3 haben wir uns mit der Zerlegung der Hauptmatrix $F^{(c)}(\lambda)$ als Produkt der Übergangsmatrix $P^{(c)}(\lambda)$ und einer Hauptmatrix $V^{(c)}(\lambda)$ der reduzierten Matrix-D.Gl. beschäftigt. Was wir dort gemacht haben bezieht sich sozusagen auf die Singulärstelle $\lambda = 0$. Nun wollen wir etwas Ähnliches bei der Singulärstelle $\lambda = \infty$ machen; kurz gesagt, wir wollen eine Matrix $\hat{P}^{(c)}(\lambda)$ erhalten, die den Übergang von der Grund-D.Gl. (6.1) zu der reduzierten D.Gl.

$$(6.49) \quad \frac{dV}{d\xi} = \begin{pmatrix} 0 & \mu_2 + \frac{8}{\xi} \\ -\mu_1 + \frac{8}{\xi} & 0 \end{pmatrix} V = B V$$

durchführt mit der zusätzlichen Eigenschaft

$$(6.50) \quad \lim_{\bar{z} \rightarrow \infty} \hat{P}^{(10)}(\bar{z}) = I$$

Mit diesem $\hat{P}^{(10)}(\bar{z})$ haben wir

$$(6.51) \quad F^{(10)}(\bar{z}) = \hat{P}^{(10)}(\bar{z}) V^{(10)}(\bar{z})$$

erhalten. Wir haben oft gesehen, daß dann $\hat{P}^{(10)}(\bar{z})$ eine Lösung der Übergangs-D.Gl.

$$(6.52) \quad \frac{dP}{d\bar{z}} = A(\bar{z})P - P B(\bar{z})$$

sein muß, wobei nun $A(\bar{z})$ bzw. $B(\bar{z})$ in (6.1) bzw. (6.49) erklärt sind. Dementsprechend läßt sich auch (6.52) für $|\bar{z}| < 1$ folgendermaßen ausdrücken:

$$(6.53) \quad \frac{dP(\bar{z})}{d\bar{z}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n \bar{z}^{-n} \right) P(\bar{z}) - P(\bar{z}) \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n \bar{z}^{-n} \right)$$

Machen wir jetzt für $P(\bar{z})$ folgenden Ansatz

$$(6.54) \quad P(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \bar{z}^{-n}$$

Setzen wir (6.54) in (6.53) ein und setzen dann die Koeffizienten der gleichen Potenz $\bar{z}^{-n}$ rechts und links gleich. Damit gewinnen wir folgende Rekursion für die Bestimmung der Matrizen P_r :

$$(6.55) \quad \begin{cases} (a) & A_0 P_0 - P_0 A_0 = 0 \quad (r=0) \\ (b) & -(r-1) P_{r-1} = \sum_{s=r-1}^r \{ A_{r-s} P_s - P_s A_{r-s} \} + \sum_{s=0}^{r-2} A_{r-s} P_s \quad (r \geq 1) \end{cases}$$

Wir wollen von der Matrix-Gleichung (6.55) (a) die Lösung

$$(6.56) \quad P_0 = I$$

nehmen. Die so erhaltene Rekursion (6.55) (b) ist dann

$$(6.57) \quad \begin{cases} A_0 P_r - P_r A_0 = [P_{r-1}, A_1] - A_1 \sum_{s=0}^{r-1} P_s - (r-1) P_{r-1} \quad (r \geq 1) \\ P_0 = I \end{cases}$$

wobei $[P_{r-1}, A_1]$ den Kommutator von P_{r-1} und A_1 bedeutet, und $\sum_{s=0}^{r-1}$ ist durch Null zu ersetzen, wenn $r-2 < 0$ ist.

Die Matrizen A_r bzw. P_r seien ferner mittels der A_r bzw. P_r und einer beliebigen Matrix Ω mit $\det \Omega \neq 0$ durch

$$(a) \quad \Omega A_r \Omega^{-1} = A_r \quad (r=0, 1, \dots)$$

$$(6.58) \quad (b) \quad \Omega P_r \Omega^{-1} = P_r \quad (r \geq 1)$$

gegeben. Dann gilt

$$(6.59) \quad \begin{cases} A_0 P_r - P_r A_0 = [P_{r-1}; A_1] - A_2 \sum_{s=0}^{r-2} P_s - (r-1) P_{r-1} \\ P_0 = I \end{cases}$$

Wir wollen die Rekursion (6.59) als ähnlich der Rekursion (6.57) bezeichnen. Damit folgt aus (6.58): Wenn wir die Lösung $P_r^{(1)}$ einer Rekursion erhalten haben, dann lassen sich alle ähnlichen Rekursionen mit einer geeigneten Matrix Ω einfach durch

$$(6.60) \quad \Omega P_r^{(1)} \Omega^{-1}$$

gewinnen. Diese Freiheit erlaube uns, unsere Rekursion (6.57) so zu transformieren, daß die Matrizen A_r in (6.58) die günstigste Gestalt annehmen. Diese und die der entsprechenden Transformationsmatrix Ω hängen von den verschiedenen Quadranten ab. In diesem Paragraphen sind wir nur an der Gestalt in den Quadranten $(\mu_1 < 0; \mu_2 > 0)$ bzw. $(\mu_1 > 0; \mu_2 < 0)$ interessiert.

Wir wollen in beiden Quadranten für Ω in (6.58) folgende Auswahl machen:

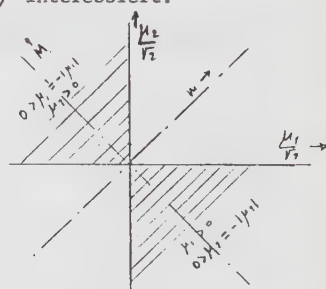
$$(6.61) \quad \Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{|\mu_1|}{|\mu_2|}\right)^{1/2} \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir für die Matrizen A_r in diesem Quadranten

$$(6.62) \quad \begin{cases} A_0 \equiv \mathcal{H}_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ A_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{H}_1 \\ \mathcal{H}_1 & 0 \end{pmatrix} \\ A_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{H}_1 \\ 0 & t+h \end{pmatrix} \end{cases}$$

mit

$$(6.63) \quad \begin{cases} (a) \quad \mathcal{H}_0 = \{|\mu_1| |\mu_2|\}^{1/2} & \text{in } (\mu_1 < 0; \mu_2 > 0) \text{ bzw.} \\ (b) \quad \mathcal{H}_0 = -\{|\mu_1| |\mu_2|\}^{1/2} & \text{in } (\mu_1 > 0; \mu_2 < 0) \end{cases}$$



(Abb. 6-2)

$$(6.64) \begin{cases} (a) & \mathcal{K}_1 = \vartheta \left(\frac{|\mu_1|}{|\mu_2|} \right)^{1/2} \\ (b) & \mathcal{K}_1 = \delta \left(\frac{|\mu_1|}{|\mu_2|} \right)^{1/2} \end{cases} ,$$

wobei

$$(6.65) \begin{cases} \vartheta = \mu_1 - \frac{\alpha}{2} \\ \delta = \frac{\alpha}{2} - |\mu_1| \end{cases} \quad \text{in } (\mu_1 < 0; \mu_2 > 0) \text{ bzw.}$$

$$(6.66) \begin{cases} \vartheta = -(|\mu_2| + \frac{\alpha}{2}) \\ \delta = \frac{\alpha}{2} + \mu_1 \end{cases} \quad \text{in } (\mu_1 > 0; \mu_2 < 0)$$

Dann können wir (6.59) durch $\mathcal{K}_0 \neq 0$ dividieren. Damit erhalten wir schließlich in diesem Quadranten folgende Rekursion

$$(6.67) \begin{cases} \mathcal{C}_0 \mathcal{P}_r - \mathcal{P}_r \mathcal{C}_0 = [\mathcal{A}_{r-1}; \mathcal{C}_1] - \mathcal{C}_2 \sum_{s=0}^{r-2} \mathcal{P}_s - \frac{1}{\mathcal{K}_0} (r-1) \mathcal{P}_{r-1} \quad (r \geq 1) \\ \mathcal{P}_0 = I \end{cases}$$

mit

$$(6.68) \begin{cases} \mathcal{C}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \mathcal{C}_0^{-1} = I \\ \mathcal{C}_1 = \frac{1}{\mathcal{K}_0} \mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{C}_2 = \frac{1}{\mathcal{K}_0} \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1 \\ 0 & \gamma_3 \end{pmatrix} \end{cases} ,$$

wobei

$$(6.69) \begin{cases} \gamma_1 = 1 - \frac{\alpha}{2|\mu_2|} \\ \gamma_2 = -1 + \frac{\alpha}{2|\mu_1|} \\ \gamma_3 = \frac{1-k}{\frac{1}{2}|\mu_1||\mu_2|} \end{cases} \quad \text{in } (\mu_1 < 0; \mu_2 > 0)$$

bzw.

$$(6.70) \begin{cases} \gamma_1 = 1 + \frac{\alpha}{2|\mu_1|} \\ \gamma_2 = -\left(1 + \frac{\alpha}{2|\mu_1|}\right) \\ \gamma_3 = \frac{1-k}{\frac{1}{2}|\mu_1||\mu_2|} \end{cases}$$

Damit können wir uns schon mit der Lösung der Rekursion in dem genannten Quadranten beschäftigen.

Zu diesem Zweck ist es zweckmäßiger, (6.67) folgendermaßen zu schreiben:

$$(6.71) \quad \begin{cases} (a) \quad C_0 P_r - P_r C_0 = A_{r-1} & (r \geq 1) \\ (b) \quad A_{r-1} = [P_{r-1}; C_1] - C_2 \sum_{s=0}^{r-2} P_s - \frac{1}{\lambda_0} (P_{r-1}) P_{r-1} & r > 1 \end{cases}$$

mit

$$(6.72) \quad \begin{aligned} P_0 &= I \\ A_{r-1} &= 0 & (r=1) \end{aligned}$$

Es ist hier sehr wichtig zu bemerken, daß A_{r-1} nur von den Matrizen $P_0, P_1, \dots, P_{r-1}$ abhängt und so in dem r -ten Schritt eine wohlbestimmte Matrix ist. Ferner können wir wegen der Eigenschaft $C_0^T = I$ alle Ergebnisse, die in § 6.2 abgeleitet wurden, hier anwenden. Daraus folgt:

1. Die Rekursion (6.71) (a) ist beim Schritt $r = n$ ($n = 1, 2, \dots$) dann und nur dann lösbar, wenn die entsprechende Matrix A_{n-1} folgende Bedingungen erfüllt:

$$(6.73) \quad \begin{cases} Sp \{A_{n-1}\} = 0 \\ Sp \{C_0 A_{n-1}\} = 0 \end{cases} \quad n \geq 1$$

Für $n=1$ sind diese Bedingungen offenbar erfüllt, da $A_0 = 0$ ist. A_{n-1} muß also für $n > 1$ folgende Gestalt annehmen

$$(6.74) \quad A_{n-1} = \begin{pmatrix} q_{n-1}^{(1)} & q_{n-1}^{(2)} \\ -q_{n-1}^{(2)} & -q_{n-1}^{(1)} \end{pmatrix}$$

2. Unter diesen Bedingungen lautet die allgemeine Lösung für P_n in (6.71) (a)

$$(6.75) \quad P_n = \lambda_n^{(1)} I + \lambda_n^{(2)} C_0 + \frac{1}{2} C_0 A_{n-1},$$

wobei die Parameter $\lambda_n^{(1)}, \lambda_n^{(2)}$ an diesem Schritt willkürlich sind.

Wir wollen beweisen, daß diese Parameter $\lambda_n^{(1)}$ und $\lambda_n^{(2)}$ sind in dem nächsten Schritt durch die Bedingungen (6.73)

$$\begin{cases} Sp \{A_n\} = 0 \\ Sp \{C_0 A_n\} = 0 \end{cases}$$

in einer eindeutigen Weise bestimmen lassen, so daß die Rekursion (6.67) eine eindeutige Lösung besitzt.

Da wir in (6.75) zwei willkürliche Parameter zur Verfügung haben, könnten wir die Gelegenheit benutzen, um zu verlangen, daß die Matrix A_{r-1} beim Schritt $r = n+1$ die geforderte Gestalt

$$A_n = \begin{pmatrix} q_n^{(1)} & q_n^{(2)} \\ -q_n^{(2)} & -q_n^{(1)} \end{pmatrix}$$

annimmt. Daß dies tatsächlich sukzessiv möglich ist, wollen wir mit dem Ver-

fahren der vollständigen Induktion beweisen.

Hilfssatz 6-4: Setzen wir voraus, daß die Lösung der Rekursion (6.71), (6.72) für $r=1, 2, \dots, n-1$ folgende Gestalt annimmt

$$(6.75) \quad \mathcal{P}_r = \lambda_r^{(1)} I + \lambda_r^{(2)} C_0 + \frac{1}{2} C_0 Q_{r-1}$$

wobei die Parameter $\lambda_r^{(1)}, \lambda_r^{(2)}$ sich eindeutig durch die Bedingungen

$$(6.76) \quad \begin{cases} Sp(Q_r) = 0 \\ Sp(C_0 Q_r) = 0 \end{cases} \quad \{ r = 1, 2, \dots, (n-1) \}$$

bestimmen lassen. Dann gilt das gleiche für $r \geq n$

Beweis: Aus (6.71)6a) erhalten wir wegen (6.76), daß

$$\mathcal{P}_n = \lambda_n^{(1)} I + \lambda_n^{(2)} C_0 + \frac{1}{2} C_0 Q_{n-1}$$

die allgemeine Lösung von (6.71)(a) für $r=n$ ist, wobei $\lambda_n^{(1)}$ und $\lambda_n^{(2)}$ zwei willkürliche Parameter sind. Damit erhalten wir aus (6.71)(a) mit den Voraussetzungen (6.75), (6.76) für die entsprechende Q_n -Matrix

$$Q_n = \left[\lambda_n^{(1)} I + \lambda_n^{(2)} C_0 + \frac{1}{2} C_0 Q_{n-1}; C_1 \right] - C_2 \sum_{s=0}^{n-1} (\lambda_s^{(1)} I + \lambda_s^{(2)} C_0) - C_2 \sum_{s=1}^{n-1} \frac{1}{2} C_0 Q_{s-1} - \frac{1}{2} n \left\{ \lambda_n^{(1)} I + \lambda_n^{(2)} C_0 + \frac{1}{2} C_0 Q_{n-1} \right\}$$

also

$$(6.77) \quad \begin{cases} Q_n = \lambda_n^{(2)} [C_0; C_1] + \frac{1}{2} [C_0 Q_{n-1}; C_1] - \left(\sum_{s=0}^{n-1} \lambda_s^{(1)} \right) C_2 - \left(\sum_{s=0}^{n-1} \lambda_s^{(2)} \right) C_2 C_0 \\ - \frac{1}{2} C_2 C_0 \left(\sum_{s=1}^{n-1} Q_{s-1} \right) - \frac{1}{2} n \left(\lambda_n^{(1)} I + \lambda_n^{(2)} C_0 + \frac{1}{2} C_0 Q_{n-1} \right) \end{cases}$$

Nun wollen wir sehen, daß die Bedingungen (6.76) mit $r=n$ die Parameter $\lambda_n^{(1)}, \lambda_n^{(2)}$ eindeutig bestimmen. Aus $Sp(Q_n) = 0$ erhalten wir

$$(6.78) \quad \begin{aligned} & \lambda_n^{(2)} Sp \{ [C_0; C_1] \} + \frac{1}{2} Sp \{ [C_0 Q_{n-1}; C_1] \} - \left(\sum_{s=0}^{n-1} \lambda_s^{(1)} \right) Sp(C_2) \\ & - \left(\sum_{s=0}^{n-1} \lambda_s^{(2)} \right) Sp \{ C_2 C_0 \} - Sp \left\{ \frac{1}{2} C_2 C_0 \left(\sum_{s=1}^{n-1} Q_{s-1} \right) \right\} - \frac{n}{2} \lambda_n^{(1)} Sp(I) \\ & - \frac{n}{2} Sp(C_0) - \frac{n}{2} Sp \left\{ \frac{1}{2} C_0 Q_{n-1} \right\} = 0 \end{aligned}$$

Wegen der Beziehungen

$$(6.79) \quad \begin{cases} Sp \{ [C_0; C_1] \} = 0 \\ Sp \{ [C_0 Q_r; C_1] \} = 0 \\ Sp(C_2) = 0 \end{cases} \quad (r = 1, 2, \dots, (n-1))$$

$$(6.79) \quad \left\{ \begin{array}{l} Sp(c, c_0) = \gamma_1 \\ Sp \left\{ \frac{1}{2} c_1 c_0 \left(\sum_{s=2}^{n-1} a_{s-1} \right) \right\} = \frac{1}{2} \gamma_1 \left(\sum_{s=2}^{n-1} q_{(s-1)}^{(1)} \right) + \frac{1}{2} \gamma_3 \left(\sum_{s=2}^{n-1} q_{s-1}^{(2)} \right) \\ Sp(c_0) = 0 \\ Sp \left\{ \frac{1}{2} c_0 a_{n-1} \right\} = 0 \end{array} \right.$$

folgt daraus

$$(6.80) \quad \lambda_n^{(1)} = - \frac{\gamma_0 \gamma_1}{2n} \left\{ \left(\sum_{s=0}^{n-1} \lambda_s^{(2)} \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_{s=1}^{n-1} q_{(s-1)}^{(1)} \right) \right\} \\ - \frac{\gamma_0 \gamma_3}{2n} \left\{ \left(\sum_{s=0}^{n-1} \lambda_s^{(1)} \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_{s=1}^{n-1} q_{(s-1)}^{(2)} \right) \right\}$$

Andererseits erhalten wir aus $Sp(c_0 a_n) = 0$

$$(6.81) \quad \left\{ \begin{array}{l} Sp(c_0 a_n) = \lambda_n^{(1)} Sp \{ c_0 [c_0; c_1] \} + \frac{1}{2} Sp \{ c_0 [c_0 a_{n-1}; c_1] \} \\ - \left(\sum_{s=0}^{n-1} \lambda_s^{(1)} \right) Sp(c_0 c_1) - \left(\sum_{s=0}^{n-1} \lambda_s^{(2)} \right) Sp(c_0 c_2 c_0) - Sp \left\{ \frac{1}{2} c_0 c_2 c_0 \left(\sum_{s=2}^{n-1} a_{s-1} \right) \right\} \\ - \frac{n}{\gamma_0} \lambda_n^{(1)} Sp(c_0) - \frac{n}{\gamma_0} \lambda_n^{(2)} Sp \{ I \} - \frac{1}{2} \frac{n}{\gamma_0} Sp(a_{n-1}) = 0 \end{array} \right.$$

Wegen der Beziehungen

$$(6.82) \quad \left\{ \begin{array}{l} Sp \{ c_0 [c_0; c_1] \} = 0 \\ \frac{1}{2} Sp \{ c_0 [c_0 a_{n-1}; c_1] \} = (\gamma_2 - \gamma_1) q_{(n)}^{(2)} \\ Sp(c_0 c_1) = \gamma_1 \\ Sp(c_0 c_2 c_0) = Sp(c_2) = \gamma_3 \\ Sp \left\{ \frac{1}{2} c_0 c_2 c_0 \left(\sum_{s=2}^{n-1} a_{s-1} \right) \right\} = \frac{1}{2} \gamma_1 \left(\sum_{s=2}^{n-1} q_{(s-1)}^{(2)} \right) + \frac{1}{2} \gamma_3 \left(\sum_{s=2}^{n-1} q_{s-1}^{(1)} \right) \end{array} \right.$$

folgt daraus

$$(6.83) \quad \lambda_n^{(2)} = \frac{\gamma_0 (\gamma_2 \cdot \gamma_1)}{2n} q_{(n-1)}^{(2)} - \frac{\gamma_0 \gamma_1}{2n} \left\{ \left(\sum_{s=0}^{n-1} \lambda_s^{(1)} \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_{s=2}^{n-1} q_{(s-1)}^{(2)} \right) \right\} - \frac{\gamma_0 \gamma_2}{2n} \left\{ \left(\sum_{s=0}^{n-1} \lambda_s^{(2)} \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_{s=2}^{n-1} q_{(s-1)}^{(1)} \right) \right\}$$

In der zweiten Seite der Gleichung (6.80) bzw. (6.83) treten nur Elemente auf, die bei dem Schritt $n-1$ vollkommen bestimmt sind. Folglich bestimmen diese Beziehungen die Parameter $\lambda_n^{(1)}$ und $\lambda_n^{(2)}$ bei dem Schritt n eindeutig. Damit haben wir bewiesen, daß die Rekursion (6.71) sukzessiv und eindeutig lösbar ist.

Wir haben also gesehen, daß für die Werte der Parameter $\lambda_n^{(1)}, \lambda_n^{(2)}$, die in (6.80) und (6.83) angegeben sind, die Matrix Q_n folgende Gestalt annimmt

$$(6.84) \quad Q_n = \begin{pmatrix} q_{(n)}^{(1)} & q_{(n)}^{(2)} \\ -q_{(n)}^{(1)} & -q_{(n)}^{(2)} \end{pmatrix}$$

Das erlaubt uns, die Werte von $q_n^{(1)}$ und $q_n^{(2)}$ bei dem Schritt n zu berechnen. In der Tat erhalten wir

$$(6.85) \quad \begin{cases} q_n^{(1)} = \text{Sp} \{ \Delta Q_n \} & (a) \\ q_n^{(2)} = \text{Sp} \{ \Delta Q_n c_0 \} & (b) \end{cases}$$

mit

$$(6.86) \quad \Delta \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nun folgt aus (6.77)

$$(6.87) \quad \begin{cases} \Delta Q_n = \lambda_n^{(1)} \Delta [c_0; c_1] + \frac{1}{2} \Delta [c_0 Q_{n-1}; c_1] \\ - \left(\sum_{s=0}^{n-1} \lambda_s^{(1)} \right) \Delta c_1 - \left(\sum_{s=2}^{n-1} \lambda_s^{(2)} \right) \Delta c_1 c_0 - \Delta c_2 \left(\sum_{s=1}^{n-1} \frac{1}{2} c_0 Q_{s-1} \right) \\ - \frac{1}{\gamma_0} n \left(\lambda_n^{(1)} \Delta + \lambda_n^{(2)} \Delta c_0 + \frac{1}{2} \Delta c_0 Q_{n-1} \right) \end{cases}$$

Damit erhalten wir aus (6.85)(b) und den Beziehungen

$$(6.88) \quad \begin{cases} \text{Sp} \{ \Delta [c_0; c_1] \} = \gamma_2 \cdot \gamma_1 \\ \text{Sp} \{ \frac{1}{2} \Delta [c_0 Q_{n-1}; c_1] \} = -\frac{1}{2} (\gamma_2 + \gamma_1) q_{(n-1)}^{(1)} \\ \text{Sp} \{ \Delta c_2 \} = 0 \quad ; \quad \text{Sp} \{ \Delta c_2 c_0 \} = \gamma_1 \\ \text{Sp} \{ \Delta c_2 \left(\sum_{s=1}^{n-1} \frac{1}{2} c_0 Q_{s-1} \right) \} = \frac{1}{2} \gamma_1 \left(\sum_{s=1}^{n-1} q_{(s-1)}^{(1)} \right) \\ \text{Sp} \{ \Delta c_0 \} = 0 \end{cases}$$

$$(6.89) \quad \left\{ \begin{aligned} q_h^{(1)} &= (\gamma_2 - \gamma_1) \lambda_h^{(1)} - 1/2 (\gamma_2 + \gamma_1) q_{(h-1)}^{(1)} - \gamma_1 \left\{ \left(\sum_{s=0}^{n-1} \lambda_s^{(2)} \right) + 1/2 \left(\sum_{s=2}^{n-1} q_{s-1}^{(2)} \right) \right\} \\ &+ \frac{n}{\gamma_0} \left\{ q_{(h-1)}^{(2)} - \lambda_h^{(1)} \right\} \\ q_0^{(1)} &= 0 \end{aligned} \right.$$

Ferner folgt aus (6.77) auch

$$(6.90) \quad \begin{aligned} \Delta Q_n c_0 &= \lambda_n^{(2)} \Delta [c_0; c_1] c_0 + 1/2 \Delta [c_0 Q_{n-1}; c_1] c_0 \\ &- \left(\sum_{s=0}^{n-1} \lambda_s^{(1)} \right) \Delta c_2 c_0 - \left(\sum_{s=0}^{n-1} \lambda_s^{(2)} \right) \Delta c_2 - \frac{1}{2} \Delta c_2 c_0 \left(\sum_{s=2}^{n-1} Q_{s-1} \right) c_0 \\ &- \frac{n}{\gamma_0} (\lambda_n^{(1)} \Delta c_0 + \lambda_n^{(2)} \Delta + 1/2 \Delta c_0 Q_{n-1} c_0). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir aus (6.85) (b) und den Beziehungen

$$(6.91) \quad \left\{ \begin{aligned} Sp \{ \Delta [c_0; c_1] c_0 \} &\equiv 0 \\ Sp \{ 1/2 \Delta [c_0 Q_{n-1}; c_1] c_0 \} &= -\gamma_1 q_{n-1}^{(2)} \\ Sp \{ \Delta c_2 c_0 \} &= \gamma_1; \quad Sp \{ \Delta c_2 \} = 0 \\ Sp \{ 1/2 \Delta c_2 c_0 \left(\sum_{s=2}^{n-1} Q_{s-1} \right) c_0 \} &= 1/2 \gamma_1 \left(\sum_{s=2}^{n-1} q_{s-1}^{(2)} \right) \\ Sp \{ \Delta c_0 Q_{n-1} c_0 \} &= -q_{(n-1)}^{(1)} \end{aligned} \right.$$

$$(6.92) \quad q_h^{(2)} = -\gamma_1 \left\{ q_{(h-1)}^{(2)} + \left(\sum_{s=0}^{n-1} \lambda_s^{(1)} \right) + 1/2 \left(\sum_{s=2}^{n-1} q_{s-1}^{(2)} \right) \right\} - \frac{n}{\gamma_0} (\lambda_h^{(2)} - q_{(h-1)}^{(1)})$$

Es ist hier zu bemerken, daß $q_h^{(1)}$ und $q_h^{(2)}$ in der Beziehung (6.89) und (6.92) wegen (6.80) und (6.83) eindeutig bestimmt sind.

Aus (6.75) erhalten wir weiter

$$(6.93) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{P}_n &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_n^{(1)} + \lambda_n^{(2)} & (q_{n-1}^{(1)} - q_{n-1}^{(2)}) \\ -(q_{n-1}^{(1)} + q_{n-1}^{(2)}) & \lambda_n^{(1)} - \lambda_n^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (h \geq 1) \\ \mathcal{P}_0 &= I \end{aligned} \right.$$

Wir können alle diese Resultate folgendermaßen zusammenfassen:

1. Die Rekursion (6.57) besitzt im Quadranten $(\mu_1 < 0; \mu_2 > 0)$ bzw. $(\mu_1 > 0; \mu_2 < 0)$ eine eindeutige Lösung.
2. Diese Lösung ist folgendermaßen gegeben:

$$(6.94) \quad \begin{cases} P_n = S \begin{pmatrix} \lambda_n^{(1)} + \lambda_n^{(2)} & (q_n^{(1)} - q_n^{(2)}) \\ -(q_{n-1}^{(1)} + q_{n-1}^{(2)}) & \lambda_n^{(1)} - \lambda_n^{(2)} \end{pmatrix} S^{-1} \quad (n \geq 1) \\ P_0 = I \end{cases},$$

wobei

$$(6.95) \quad S = \begin{pmatrix} \frac{1}{r_2} & \frac{1}{r_2} \\ \frac{1}{r_2} \left\{ \frac{r_1}{r_2} \right\}^{1/2} & -\frac{1}{r_2} \left\{ \frac{r_1}{r_2} \right\}^{1/2} \end{pmatrix}$$

Die Elemente $\lambda_n^{(1)}, \lambda_n^{(2)}$ bzw. $q_n^{(1)}, q_n^{(2)}$ sind nacheinander durch die Rekursionen (6.80), (6.83) bzw. (6.89), (6.92) mit den Anfangsbedingungen

$$(6.96) \quad \begin{cases} \lambda_0^{(1)} = 1; \quad \lambda_0^{(2)} = 0 \\ q_0^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2) \end{cases}$$

gegeben.

3. Für $n=1$ bzw. $n=2$ erhalten wir

$$(6.97) \quad \begin{cases} \lambda_1^{(1)} + \lambda_1^{(2)} = -\frac{\mu_0}{2} (r_1 + r_3) & (q_0^{(1)} - q_0^{(2)}) = 0 \\ \lambda_1^{(1)} - \lambda_1^{(2)} = \frac{\mu_0}{2} (r_1 - r_3) & -(q_0^{(1)} + q_0^{(2)}) = 0 \end{cases};$$

bzw.

$$(6.98) \quad \begin{cases} \lambda_2^{(1)} + \lambda_2^{(2)} = -\frac{\mu_0}{4} (r_1 + r_3) + \frac{\mu_0^2}{8} r_1 (r_1 + r_3) + \frac{\mu_0}{4} r_1 (r_2 - r_1) + \frac{\mu_0^2}{8} r_3^2 \\ \lambda_2^{(1)} - \lambda_2^{(2)} = \frac{\mu_0}{4} (r_1 - r_3) + \frac{\mu_0^2}{8} r_1 (r_1 - r_3) - \frac{\mu_0}{4} r_1 (r_2 - r_1) + \frac{\mu_0^2}{8} r_3^2 \end{cases}$$

$$(6.99) \quad \begin{cases} q_1^{(1)} - q_1^{(2)} = \frac{1}{2} (r_1 + r_3) + \frac{\mu_0}{2} r_1 (r_1 - r_2) \\ -(q_1^{(1)} + q_1^{(2)}) = \frac{1}{2} (r_1 - r_3) - \frac{\mu_0}{2} r_1 (r_1 - r_2) \end{cases}$$

Wenn ferner $r_1 = 0$ und $r_3 = 0$ (das ist nur möglich für reelle Werte von μ_1, μ_2 im Quadranten $(\mu_1 < 0; \mu_2 > 0)$, wenn $\mu_2 = \frac{\pi}{2}$ und $k=1$ sind), dann sind nach (6.80) (6.83), (6.89) und (6.93) alle $P_n = 0$

4. Das Produkt

$$(6.100) \quad \left\{ S \left(\sum_{n=0}^{\infty} R_n \mathbb{E}^{-n} \right) / S^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(n)} (\mu_1; \mu_2) \cdot (2/\beta \mathbb{E})^{-n} \right\}.$$

mit

$$(6.101) \quad R_n = \begin{pmatrix} \lambda_n^{(1)} + \lambda_n^{(2)} & (q_{n-1}^{(1)} - q_{n-1}^{(2)}) \\ -(q_{n-1}^{(1)} + q_{n-1}^{(2)}) & \lambda_n^{(1)} - \lambda_n^{(2)} \end{pmatrix} ; \quad R_0 = I$$

stellt dann eine formale Lösung der Matrix-D.Gl. (6.1) dar. Aber dann wissen wir, daß es eine wirkliche Lösung der Matrix-D.Gl. (6.1) gibt

$$(6.102) \quad \underline{F}(x) = \underline{\hat{F}}(x) (2\beta x)^{\gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} e^{\beta \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x},$$

so daß

$$(6.103) \quad \underline{\hat{F}}(x) \sim S \left(\sum_{n=0}^{\infty} R_n \bar{x}^{-n} \right) \left(S^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(\infty)} (\mu_1/\mu_2) (2\beta \bar{x})^{-n} \right) \\ \quad \quad \quad (VS_n; n < n)$$

gilt. Daraus schließen wir, daß in (6.12)

$$(6.104) \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad D = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & -\gamma_1 \end{pmatrix} \quad \text{sind.}$$

Damit entnehmen wir dem Lemma 6-1, daß die formale Lösung der Übergangsmatrix-D.Gl. (6.52) in $(\mu_1 < 0; \mu_2 > 0)$ bzw. $(\mu_1 > 0; \mu_2 < 0)$

$$(6.105) \quad \underline{F}^{(1)}(\bar{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \bar{x}^{-n} = S \left(\sum_{n=0}^{\infty} R_n \bar{x}^{-n} \right) S^{-1}$$

entweder in einem geeigneten Intervall von $\bar{x} = \infty$ konvergiert, oder (6.52) besitzt eine Hauptmatrix $\underline{\hat{P}}^{(1)}(\bar{x})$ mit der Eigenschaft

$$(6.106) \quad \underline{\hat{P}}^{(1)}(\bar{x}) \sim S \left(\sum_{n=0}^{\infty} R_n \bar{x}^{-n} \right) S^{-1}$$

Für $\mu_1 = \frac{\kappa}{2}$ und $\kappa = 1$ reduziert sich dieses zu der Einheitsmatrix I.

5. Es gibt eine Hauptmatrix $\underline{\hat{F}}^{(1)}(\bar{x})$ der Grundmatrix-D.Gl. im Quadranten $(\mu_1 < 0; \mu_2 > 0)$ bzw. $(\mu_1 > 0; \mu_2 < 0)$ die sich folgendermaßen ausdrücken läßt

$$(6.107) \quad \underline{\hat{F}}^{(1)}(\bar{x}) = \underline{\hat{P}}(\bar{x}) V^{(1)}(\bar{x}),$$

wobei $V^{(1)}(\bar{x})$ in (3.30) für $(\mu_1 < 0; \mu_2 > 0)$ bzw. in (3.72) (b) für $(\mu_1 > 0; \mu_2 < 0)$ gegeben ist.

Asymptotisch gilt

$$(6.108) \quad \hat{E}^{(10)}(\bar{z}) \sim S \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^n R_r T_{n-r} \right) \bar{z}^{-n} \right\} (2\beta \bar{z})^{\gamma} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} e^{\beta \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{z}}$$

mit

$$(6.109) \quad T_{\nu} = S^{-1} V_{\nu}^{(10)} (2\beta)^{-\nu}.$$

Dabei ist zu beachten, daß $V_0^{(10)} = S \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ bzw. $V_0^{(10)} = S$ für $(\mu_1 < 0; \mu_2 > 0)$ bzw. $(\mu_1 > 0; \mu_2 < 0)$ und γ_0 sind.

Die Matrizen $V_n^{(10)}$ bzw. die entsprechenden Parameter $\gamma_1; \gamma_2 \dots$ sind für $(\mu_1 > 0; \mu_2 < 0)$ in (3.45) bzw. (3.4) ((3.1(a) und für $\mu_1 > 0; \mu_2 < 0$ in (3.84) bzw. (3.48) und (3.50) gegeben.

6. Es gibt zwei linear unabhängige Lösungen des Grund-D.Gl.Systems (2.1), so daß

$$(6.110) \quad \begin{cases} f_{1,1}^{(10)}(\bar{z}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (2\beta \bar{z})^{\gamma_1} e^{-\beta \bar{z}} (1 + O\{(2\beta \bar{z})^{-1}\}) \\ f_{2,1}^{(10)}(\bar{z}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{\mu_1}{\mu_2} \right\}^{\frac{1}{2}} (2\beta \bar{z})^{\gamma_1} e^{-\beta \bar{z}} (1 + O\{(2\beta \bar{z})^{-1}\}) \end{cases}$$

$$(6.111) \quad \begin{cases} f_{1,1}^{(10)}(\bar{z}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{\mu_1}{\mu_2} \right\}^{\frac{1}{2}} (2\beta \bar{z})^{\pm \gamma_1} e^{\beta \bar{z}} (1 + O\{(2\beta \bar{z})^{-1}\}) \end{cases}$$

gilt. Das "+" bzw. "-" Vorzeichen gilt für den Quadranten $(\mu_1 < 0; \mu_2 > 0)$ bzw. $(\mu_1 > 0; \mu_2 < 0)$. Von diesen Lösungen erfüllt (6.110) nur die Randbedingungen bei $\bar{z} = \infty$.

§ 6.4 Asymptotische Struktur der Übergangsmatrix $\hat{P}^{(10)}(z,1)$ im Quadranten $(\mu_1 > 0; \mu_2 > 0)$ bzw. $(\mu_1 < 0; \mu_2 < 0)$ Anschluß von Eigenwerten

In diesem Quadranten wollen wir folgende Auswahl für die Ω -Matrix in (6.58) machen

$$(6.112) \quad \Omega \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \left\{ \frac{\mu_1}{\mu_2} \right\}^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir für die $\mathcal{A}_k$ -Matrizen in den oben genannten Quadranten folgenden

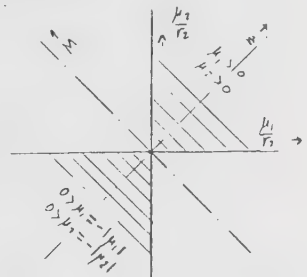


Abb. 6-3)

$$(6.113) \quad \begin{cases} A_0 \equiv \mathcal{X}_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ A_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{X}_1 \\ \mathcal{X}_2 & 0 \end{pmatrix} \\ A_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{X}_1 \\ 0 & 1-k \end{pmatrix} \end{cases}$$

mit

$$(6.114) \quad \begin{cases} \mathcal{X}_0 = i \{ |\mu_1| |\mu_2| \}^{1/2} & \text{in } (\mu_1 > 0; \mu_2 > 0) \\ \mathcal{X}_0 = -i \{ |\mu_1| |\mu_2| \}^{1/2} & \text{in } (\mu_1 < 0; \mu_2 < 0) \end{cases}$$

$$(6.115) \quad \begin{cases} \mathcal{X}_1 = i \delta \left(\frac{|\mu_1|}{|\mu_2|} \right)^{1/2} \\ \mathcal{X}_2 = -i \delta \left(\frac{|\mu_2|}{|\mu_1|} \right)^{1/2} \end{cases}$$

wobei

$$(6.116) \quad \begin{cases} \delta = \mu_2 - \frac{1}{2} \\ \delta = \frac{\alpha}{2} + \mu_1 \end{cases} \quad \text{in } (\mu_1 > 0; \mu_2 > 0)$$

bzw.

$$(6.117) \quad \begin{cases} \delta = -(|\mu_2| + \frac{1}{2}) \\ \delta = \frac{\alpha}{2} - |\mu_1| \end{cases} \quad \text{in } (\mu_1 < 0; \mu_2 < 0)$$

sind.

Auch hier können wir die entsprechende Rekursion (6.59) durch $\mathcal{X}_0$ dividieren.

Wir erhalten wieder die Rekursion (6.67) mit den Matrizen (6.68), wobei die γ_i -Parameter jetzt

$$(6.118) \quad \begin{cases} \gamma_1 = 1 - \frac{\alpha}{2|\mu_1|} \\ \gamma_2 = - \left(1 + \frac{\alpha}{2|\mu_1|} \right) \\ \gamma_3 = -i \frac{1-k}{\{ |\mu_1| |\mu_2| \}^{1/2}} \end{cases} \quad \text{in } (\mu_1 > 0; \mu_2 > 0)$$

$$(6.119) \quad \begin{cases} \gamma_1 = 1 + \frac{\alpha}{2|\mu_1|} \\ \gamma_2 = -1 + \frac{\alpha}{2|\mu_1|} \\ \gamma_3 = -i \frac{1-k}{\{ |\mu_1| |\mu_2| \}^{1/2}} \end{cases} \quad \text{in } (\mu_1 < 0; \mu_2 < 0)$$

sind. Damit lassen sich alle Ergebnisse des vorigen § 6.3 hier unmittelbar übertragen. Wir können auch hier diese Ergebnisse folgendermaßen zusammenfassen:

1. Die Rekursion (6.57) besitzt im Quadranten $(\mu_1 > 0; \mu_2 > 0)$ bzw. $(\mu_1 < 0; \mu_2 < 0)$ eine eindeutige Lösung.
2. Diese Lösung ist folgendermaßen gegeben:

$$(6.120) \quad \begin{cases} P_n = S \begin{pmatrix} \lambda_n^{(1)} + \lambda_n^{(2)} & (q_{n-1}^{(1)} - q_{n-1}^{(2)}) \\ -(q_{n-1}^{(1)} + q_{n-1}^{(2)}) & \lambda_n^{(1)} - \lambda_n^{(2)} \end{pmatrix} S^{-1} & (n \geq 1) \\ P_0 = I \end{cases}$$

wobei

$$(6.121) \quad S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{|\mu_1|}{|\mu_2|} \right\}^{1/2} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{|\mu_1|}{|\mu_2|} \right\}^{1/2} \end{pmatrix}$$

ist. Die Elemente $\lambda_n^{(1)}, \lambda_n^{(2)}$ bzw. $q_{n-1}^{(1)}, q_{n-1}^{(2)}$ sind nacheinander durch die Rekursion (6.80), (6.83) bzw. (6.89), (6.92) mit den Anfangsbedingungen (6.96) gegeben, wobei Y_i in (6.118) für $(\mu_1 > 0; \mu_2 > 0)$ bzw. in (6.119) für $(\mu_1 < 0; \mu_2 < 0)$ angegeben sind.

3. Für $n=1$ bzw. $n=2$ erhalten wir mit Y_i in (6.118) für $(\mu_1 > 0; \mu_2 > 0)$ bzw. mit Y_i in (6.119) für $(\mu_1 < 0; \mu_2 < 0)$, was in (6.97), (6.98) und (6.99) angegeben ist.

4. Aus dem Lemma 6-1 entnehmen wir, daß die formale Lösung der Übergangsmatrix-D.Gl. (6.52) in $(\mu_1 > 0; \mu_2 > 0)$, $(\mu_1 < 0; \mu_2 < 0)$

$$(6.122) \quad P^{(\infty)}(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \bar{z}^{-n} = S \left(\sum_{n=0}^{\infty} R_n \bar{z}^{-n} \right) S^{-1},$$

wobei R_0 bzw. $R_n (\mu_1, \mu_2)$ in (6.101) angegeben sind, entweder in einem geeigneten Intervall von $\bar{z} = \infty$ konvergiert oder daß (6.52) eine Hauptmatrix $\hat{P}^{(\infty)}(\bar{z})$ mit der Eigenschaft (6.106) besitzt.

5. Es gibt eine Hauptmatrix $\hat{F}^{(\infty)}(\bar{z})$ der Grundmatrix-D.Gl. im Quadranten $(\mu_1 > 0; \mu_2 > 0)$ bzw. $(\mu_1 < 0; \mu_2 < 0)$, die sich folgendermaßen ausdrücken läßt

$$(6.123) \quad \hat{F}^{(\infty)}(\bar{z}) = \hat{P}(\bar{z}) V^{(\infty)}(\bar{z}),$$

wobei $V^{(\infty)}(\bar{z})$ in (3.93) für $(\mu_1 > 0; \mu_2 > 0)$ bzw. (3.94) für $(\mu_1 < 0; \mu_2 < 0)$ gegeben ist. Asymptotisch gilt

$$(6.124) \quad \hat{F}^{(1,0)}(\bar{z}) \sim S \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\mu=0}^n R_{\mu} T_{n-\mu} \right) \bar{z}^{-n} \right\} (2i|\beta| \bar{z})^{\hat{\tau}_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{\pm i|\beta| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{z}}$$

mit

$$(6.125) \quad \begin{cases} T_{\nu} = S^{-1} V_{\nu}^{(1,0)} (-2i|\beta|)^{-\nu} & \text{für } \mu_1 > 0; \mu_2 > 0 \\ T_{\nu} = S^{-1} V_{\nu}^{(1,0)} (2i|\beta|)^{-\nu} & \text{für } \mu_1 < 0; \mu_2 < 0 \end{cases}$$

Das "+" bzw. "-" Vorzeichen gilt für $\mu_1 > 0; \mu_2 > 0$ bzw. $\mu_1 < 0; \mu_2 < 0$

Die Matrizen $V_n^{(1,0)} (n \geq 0)$ bzw. die entsprechenden Parameter $\tau_1, \tau_2, \dots$ sind für $\mu_1 < 0; \mu_2 < 0$ in (3.101) bzw. (3.86) und für $\mu_1 < 0; \mu_2 < 0$ in (3.101) bzw. (3.87) gegeben.

6. Es gibt zwei linear unabhängige Lösungen des Grund-D.Gl. Systems (2.1), so daß gilt:

$$(6.126) \quad \begin{cases} f_{1,1}^{(1,0)}(\bar{z}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\pm i 2|\beta| \bar{z})^{-i \hat{\tau}_1} e^{\pm i|\beta| \bar{z}} \left\{ 1 + O\left(\frac{\pm 1}{2i|\beta| \bar{z}}\right) \right\} \\ f_{2,1}^{(1,0)}(\bar{z}) = \mp \frac{i}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{|\mu_1|}{|\mu_2|} \right\}^{1/2} (\pm i 2|\beta| \bar{z})^{-i \hat{\tau}_1} e^{\pm i|\beta| \bar{z}} \left\{ 1 + O\left(\frac{\pm 1}{2i|\beta| \bar{z}}\right) \right\} \end{cases}$$

$$(6.127) \quad \begin{cases} f_{1,2}^{(1,0)}(\bar{z}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\pm i 2|\beta| \bar{z})^{+i \hat{\tau}_1} e^{\pm i|\beta| \bar{z}} \left\{ 1 + O\left(\frac{\pm 1}{2i|\beta| \bar{z}}\right) \right\} \\ f_{2,2}^{(1,0)}(\bar{z}) = \pm \frac{i}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{|\mu_1|}{|\mu_2|} \right\}^{1/2} (\pm i 2|\beta| \bar{z})^{+i \hat{\tau}_1} e^{\pm i|\beta| \bar{z}} \left\{ 1 + O\left(\frac{\pm 1}{2i|\beta| \bar{z}}\right) \right\} \end{cases}$$

mit dem "+" für $(\mu_1 > 0; \mu_2 > 0)$ bzw. dem "-" für $(\mu_1 < 0; \mu_2 < 0)$. Dabei ist $\hat{\tau}_1 = \tau_1 + \tau_2$ (s. (3.46) und (3.87)).

Wir sehen, daß keine der beiden linear unabhängigen Lösungen (6.126), (6.127) die Integralbedingung (1.6) befriedigen kann, so daß in $(\mu_1 > 0; \mu_2 > 0)$ bzw. $(\mu_1 < 0; \mu_2 < 0)$ kein Eigenwert eintreten kann.

7. Mathematische Hilfsmittel

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit dem Beweis derjenigen mathematischen Hilfsmittel, die für die Entwicklung der § 1.3 und § 1.4 in Kap. 1 nötig sind.

§ 7.1 Die Matrix-D.Gl. (1.18) bzw. (1.20) und ihre entsprechende Volterrasche Integral-Gl. Beweis der Beziehung (1.35)

Betrachten wir zuerst die Matrix-D.Gl. (1.26)

$$(7.1) \quad \frac{d}{dx} Q_k(x) = \frac{1}{x} B_0(\mu_1, \mu_2) Q_k(x) + \frac{1}{1-x} [B_1(\mu_1, \mu_2); Q_k(x)]$$

und die folgenden

$$(7.2) \quad \frac{d}{dx} G(x) = \left\{ \frac{1}{x} B_0(\mu_1, \mu_2) + \frac{1}{1-x} B_1(\mu_1, \mu_2) \right\} G(x)$$

$$(7.3) \quad \frac{d}{dx} S(x) = \frac{1}{1-x} B_1(\mu_1, \mu_2) S(x)$$

wobei $B_0(\mu_1, \mu_2)$, $B_1(\mu_1, \mu_2)$ in (1.19) angegeben sind. Ferner seien $G_k^{(1)}(x)$ bzw. $S^{(1)}(x)$ eine spezielle Hauptmatrix von (7.2) bzw. (7.3).

Hilfssatz 7-1: Die allgemeine Hauptmatrix von (7.1) lautet

$$(7.4) \quad Q_k(x) = G_k^{(1)}(x) A_k(\mu_1, \mu_2) (S^{(1)}(x))^{-1},$$

wobei $A_k(\mu_1, \mu_2)$ eine Konstantenmatrix mit $\det A_k(\mu_1, \mu_2) \neq 0$ ist.

Beweis:

Machen wir für $Q_k(x)$ den Ansatz

$$(7.5) \quad Q_k(x) = G_k^{(1)}(x) A_k(x) S^{(1)}(x)$$

Nun setzen wir (7.5) in (7.1) ein und benutzen für die Ableitung einer beliebigen Matrixfunktion $T(x)$ die Identität

$$(7.6) \quad \frac{d T^{-1}(x)}{dx} = -T^{-1}(x) \frac{dT(x)}{dx} T^{-1}(x)$$

Damit geht (7.1) über in

$$(7.7) \quad G_k^{(1)}(x) \frac{d}{dx} A_k(x) (S^{(1)}(x))^{-1} = 0$$

Daraus folgt $\frac{d}{dx} A_k(x) = 0$, so daß $A_k(x) = \text{const.}$ ist. Wählen wir $A_k = 0$, da $\det A_k \neq 0$ ist, dann erhalten wir, daß $G_k^{(1)}(x)$ die Hauptmatrix von

(7.1) sich mit einer eindeutigen Konstantenmatrix $A_k(\mu_1, \mu_2)$ in der Form (7.4) ausdrücken läßt.

Betrachten wir ferner folgende Volterrasche Integral-Gl.

$$(7.8) \quad \begin{cases} P_k(x) = G_k^{(4)}(x) A_k(\mu_1, \mu_2) (S^{(4)}(x))^{-1} + \\ G_k^{(4)}(x) \left\{ \int_{\epsilon}^x dt \frac{t}{(t-1)^2} (G_k^{(4)}(t))^{-1} \cdot [B_2(\mu_1, \mu_2); P_k(t)] S^{(4)}(t) \right\} (S^{(4)}(x))^{-1}, \end{cases}$$

wobei $A_k(\mu_1, \mu_2)$ eine Zahlenmatrix und ϵ ein gegebener Parameter aus $(0, 1)$ ist. Die Matrix $B_2(\mu_1, \mu_2)$ ist in (1.19) angegeben. Dann wollen wir folgenden Hilfssatz beweisen:

Hilfssatz 7-2: Zu jedem $\epsilon \in (0, 1)$ und jeder Hauptmatrix $P_k(x)$ von (1.18) gibt es eine Zahlenmatrix $A = A_k^*(\mu_1, \mu_2)$ so, daß $P_k(x)$ die Gleichung (7.8) löst. Umgekehrt erfüllt jede Lösung $P_k(x)$ von (7.8) bei gegebenem $A_k(\mu_1, \mu_2)$ und ϵ auch die D.Gl. (1.59). Diese Lösung erfüllt die Randbedingung

$$(7.9) \quad P_k(\epsilon) = G_k(\epsilon)$$

Beweis:

Der erste Teil der Behauptung ist gleichwertig mit der Aussage, daß zu gegebenem ϵ und $P_k(x)$ eine Matrix A_k existiert, so daß

$$(7.10) \quad A_k + \int_{\epsilon}^x dt \frac{t}{(t-1)^2} (G_k^{(4)}(t))^{-1} \cdot [B_2(\mu_1, \mu_2); P_k(t)] S^{(4)}(t) = G_k^{-1}(x) P_k(x) S^{(4)}(x)$$

eine Identität in x ist. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß die Ableitung der beiden Seiten identisch gleich ist

$$(7.11) \quad \frac{x}{(1-x)^2} [B_2(\mu_1, \mu_2); P_k(x)] S^{(4)}(x) = \frac{d}{dx} \left\{ G_k^{-1}(x) P_k(x) S^{(4)}(x) \right\}$$

Das ergibt sich aber direkt aus den D.Gln. für G , P und S .

Nehmen wir jetzt an, daß $P_k(x)$ eine Lösung der Integral-Gl. (7.8) mit bestimmten $A_k(\mu_1, \mu_2)$ und ϵ ist. Dann erhalten wir

$$(7.12) \quad \begin{aligned} \frac{dP_k(x)}{dx} &= \frac{1}{x} B_0(\mu_1, \mu_2) G_k^{(4)}(x) A_k(\mu_1, \mu_2) (S^{(4)}(x))^{-1} \\ &+ \frac{1}{1-x} [B_1(\mu_1, \mu_2); G_k^{(4)}(x) A_k(\mu_1, \mu_2) (S^{(4)}(x))^{-1}] + \left\{ \frac{1}{1-x} B_0(\mu_1, \mu_2) + \frac{1}{1-x} B_1(\mu_1, \mu_2) \right\} \\ &\cdot G_k^{(4)}(x) \left\{ \int_{\epsilon}^x \frac{t}{(t-1)^2} G_k^{(4)}(t) [B_2(\mu_1, \mu_2); P_k(t)] S^{(4)}(t) dt \right\} (S^{(4)}(x))^{-1} + \frac{x}{1-x} [B_2(\mu_1, \mu_2); \\ &P_k(x)] \cdot G_k^{(4)}(x) \left\{ \int_{\epsilon}^x \frac{t}{(t-1)^2} (G_k^{(4)}(t))^{-1} [B_2(\mu_1, \mu_2); P_k(t)] S^{(4)}(t) dt \right\} (S^{(4)}(x))^{-1} \\ &\cdot \left\{ \frac{1}{1-x} B_1(\mu_1, \mu_2) \right\}, \end{aligned}$$

wobei wir die D.Gl. (7.2), (7.3) und die Beziehung (7.6) benutzt haben. Damit folgt aus (7.8)

$$\begin{cases} \frac{dP_k(x)}{dx} = \frac{1}{x} B_0(\mu_i, \mu_j) P_k(x) + \frac{1}{1-x} [B_1(\mu_i, \mu_j); P_k(x)] \\ + \frac{x}{1-x} [B_2(\mu_i, \mu_j); P_k(x)] \end{cases}$$

Nun wissen wir aus dem 6. Kapitel, daß die Matrix-D.Gl. (1.18) eine Lösung $\hat{P}^{(w)}(x)$ besitzt, so daß

$$(7.13) \quad \lim_{x \rightarrow 1_-} \hat{P}^{(w)}(x) = I$$

gilt. Dementsprechend besitzt die Integral-Gl. (7.6) wegen des Hilfssatzes 7-2 auch eine solche Lösung. Versuchen wir nun, die entsprechenden $A_k^e(\mu_i, \mu_j)$ und ϵ zu finden.

Zu diesem Zweck wählen wir in (7.8) $G_k^{(w)}(x) = G_k^{(w)}(x)$ und $S^{(w)}(x) = S^{(w)}(x)$ so aus, daß

$$(7.14) \quad \lim_{x \rightarrow 1_-} G_k^{(w)}(x) (S^{(w)}(x))^{-1} = 1$$

gilt. Damit erhalten wir aus (7.8)

$$(7.15) \quad \begin{cases} P_k^{(w)}(x) = (G_k^{(w)}(x) (S^{(w)}(x))^{-1}) S^{(w)}(x) \cdot \\ \cdot \left\{ A_k^e(\mu_i, \mu_j) + \int_{\epsilon}^x dt \frac{t}{(1-t)^2} (S^{(w)}(t))^{-1} (G_k^{(w)}(t) S^{(w)}(t))^{-1} [B_2(\mu_i, \mu_j); P_k^{(w)}(t)] S^{(w)}(t) \right. \\ \cdot (S^{(w)}(x))^{-1} \end{cases}$$

Daraus folgt wegen (7.14)

$$(7.16) \quad \lim_{x \rightarrow 1_-} \int_{\epsilon}^x dt \frac{t}{(1-t)^2} (S^{(w)}(t))^{-1} (G_k^{(w)}(t) S^{(w)}(t))^{-1} [B_2(\mu_i, \mu_j); P_k^{(w)}(t)] S^{(w)}(t) = I - A_k^e(\mu_i, \mu_j)$$

Die Beziehung (7.16) besagt uns einerseits, daß das Integral

$$(7.17) \quad \int_{\epsilon}^x dt \frac{t}{(1-t)^2} (S^{(w)}(t))^{-1} (G_k^{(w)}(t) S^{(w)}(t))^{-1} [B_2(\mu_i, \mu_j); P_k^{(w)}(t)] S^{(w)}(t)$$

wohldefiniert ist (d.h. es stellt eine Konstantenmatrix $I - A_k^e(\mu_i, \mu_j)$ dar), andererseits, daß die Konstantenmatrix $A_k^e(\mu_i, \mu_j)$ eine Funktion des Parameters ϵ ist.

Wählen wir speziell $\epsilon = 1$, was nach (7.17) möglich ist, dann reduziert sich $A_k^\epsilon(\mu_1, \mu_2)$ wegen (7.16) zu der Einheitsmatrix. Daraus ergibt sich

$$(7.18) \quad \begin{cases} P_k^{(1)}(x) = Q_k^{(1)}(x) + Q_k^{(1)}(x) S^{(1)}(x) \cdot \\ \cdot \left\{ \int_{-1}^x \frac{t}{(1-t)^2} (S^{(1)}(t))^{-1} (Q_k^{(1)}(t))^{-1} [B_2(\mu_1, \mu_2); P_k^{(1)}(t)] S^{(1)}(t) dt \right\} (S^{(1)}(x))^{-1} \end{cases}$$

mit $Q_k^{(1)}(x) = G_k^{(1)}(x) (S^{(1)}(x))^{-1}$

Ferner können wir (7.8) im allgemeinen auch so schreiben

$$(7.19) \quad \begin{cases} P_k(x) = Q_k(x) + Q_k(x) S^{(1)}(x) \cdot \\ \cdot \left\{ \int_{\epsilon}^x dt \frac{t}{(1-t)^2} (S^{(1)}(t))^{-1} (Q_k(t))^{-1} [B_2(\mu_1, \mu_2); P_k(t)] S^{(1)}(t) \right\} (S^{(1)}(x))^{-1} \end{cases}$$

mit $Q_k(x) = G_k^{(1)}(x) A_k(\mu_1, \mu_2) (S^{(1)}(x))^{-1}$

Nun fragen wir, welches ϵ und $Q_k(x)$ man in (7.19) einsetzen muß, damit auf der linken Seite $P_k^{(0)}(x)$ entsteht. Dazu muß man beachten, daß sowohl

$P_k(x)$ als auch $Q_k(x)$ einen Pol der Ordnung $1-k$ ($k > 1$) besitzen.

($S(x)$ ist analytisch bei $x=0$). Folglich muß jedes Glied in (7.19) einen solchen Pol besitzen. Daraus folgt, daß das Integral $\int_{\epsilon}^x dt \frac{t}{(1-t)^2} (\dots)$ in (7.19) bei $x=0$ beschränkt bleiben muß.

Wählen wir dann $\epsilon = 0$, so strebt dieses Integral zu Null, wenn $x \rightarrow 0$ strebt. Damit erhalten wir

$$(7.20) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^{1-k} P^{(0)}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^{1-k} Q_k(x)$$

d.h. dann muß $Q_k(x) = Q_k^{(0)}(x)$ sein. Dementsprechend erhalten wir

$$(7.21) \quad \begin{cases} P_k^{(0)}(x) = Q_k^{(0)}(x) + Q_k^{(0)}(x) S^{(1)}(x) \left\{ \int_0^x dt \frac{t}{(1-t)^2} (S^{(1)}(t))^{-1} (Q_k^{(0)}(t))^{-1} \cdot \right. \\ \left. \cdot [B_2(\mu_1, \mu_2); P_k^{(0)}(t)] S^{(1)}(t) \right\} \cdot S^{(1)}(x)^{-1} \end{cases}$$

Betrachten wir jetzt die Matrix-D.Gln.

$$(7.22) \quad \frac{dR}{dx} = \frac{1}{1-x} [B_1(\mu_1, \mu_2); R(x)] + \frac{x}{(1-x)^2} [B_2(\mu_1, \mu_2); R(x)]$$

$$(7.23) \quad \frac{dT}{dx} = \frac{1}{1-x} [B_1(\mu_1, \mu_2); T(x)]$$

((7.22) ist die Gleichung (1.20))

$$(7.24) \quad \frac{dV}{dx} = \frac{1}{1-x} B_1(\mu_1; \mu_2) V(x) + \frac{x}{(1-x)^2} B_2(\mu_1; \mu_2) V(x)$$

$$(7.25) \quad \frac{dS}{dx} = \frac{1}{1-x} B_1(\mu_1; \mu_2) S(x)$$

((7.24) ist die reduzierte D.Gl.))

Hilfssatz 7-3:

Die allgemeine Hauptmatrix von (7.22) bzw. (7.23) lautet

$$(7.26) \quad R(x) = V^{(0)}\left(\frac{1}{1-x}\right) C(\mu_1; \mu_2) \left(V^{(0)}\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)^{-1}$$

bzw.

$$(7.27) \quad T(x) = (S^{(0)}(x)) E(\mu_1; \mu_2) (S^{(0)}(x))^{-1}$$

wobei $V^{(0)}\left(\frac{1}{1-x}\right)$ bzw. $S^{(0)}(x)$ eine spezielle Hauptmatrix von (7.24) bzw.

(7.25) ist und $C(\mu_1; \mu_2)$ bzw. $E(\mu_1; \mu_2)$ Zahlenmatrizen mit $\det C(\mu_1; \mu_2) \neq 0$ bzw. $\det E(\mu_1; \mu_2) \neq 0$ sind.

Der Beweis läuft parallel zu dem Beweis des Hilfssatzes (7-1), so daß wir ihn hier nicht wiederholen wollen.

Hilfssatz 7-4:

Jede Lösung von (7.22) erfüllt mit einem bestimmten $A(\mu_1; \mu_2)$ folgende Volterra-sche Integral-Gl.

$$(7.29) \quad R(x) = S(x) \left\{ A(\mu_1; \mu_2) + \int_0^x \frac{t}{(1-t)^2} S^{-1}(t) [B_2(\mu_1; \mu_2); R(t)] \cdot S(t) dt \right\} S^{-1}(x)$$

und umgekehrt.

Beweis:

Sei $R(x)$ eine Lösung von (7.22) mit der Randbedingung

$$(7.29) \quad R(0) = L(\mu_1; \mu_2)$$

Die Aussage, daß dieses $R(x)$ die Integral-Gl. (7.28) befriedigt, ist vollkommen gleichwertig mit der Aussage, daß

$$(7.30) \quad \frac{d}{dx} \left\{ S^{-1}(x) R(x) S(x) \right\} = \frac{x}{(1-x)^2} S^{-1}(x) [B_2(\mu_1; \mu_2); R(x)] \cdot S(x)$$

eine Identität in x ist. Dazu muß die rechte Seite bei $x=0$ noch integrierbar sein, was der Fall ist. Das können wir beweisen, indem wir die linke Seite von (7.30) differenzieren und die Gl.Gln. (7.22) und (7.25) und die Identität (7.6) in der Rechnung benutzen.

Das entsprechende $A(\mu_i, \mu_j)$ ist

$$(7.31) \quad A(\mu_i, \mu_j) = S^{-1}(0) L(\mu_i, \mu_j) S(0)$$

Daß jede Lösung von (7.28) mit einem bestimmten $A(\mu_i, \mu_j)$ eine Lösung von (7.22) ist, erhalten wir unmittelbar durch Differentiation in (7.28).

Hilfssatz 7-5: Sei

$$(7.32) \quad R^{(0; \infty)}(x) = V^{(\infty)}\left(\frac{1}{1-x}\right) C_k^{(0; \infty)}(\mu_i, \mu_j) \left(V^{(\infty)}\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)^{-1}$$

die spezielle Lösung von (7.22), die die Matrizen $P_k^{(0)}(x)$ und $P_k^{(\infty)}(x)$ verbindet, d.h.

$$(7.33) \quad P_k^{(0)}(x) = P_k^{(\infty)}(x) V^{(\infty)}\left(\frac{1}{1-x}\right) C_k^{(0; \infty)}(\mu_i, \mu_j) \left(V^{(\infty)}\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)^{-1}.$$

Ferner sei $T^{(0; \infty)}(x) = S^{(0)}(x) E_k^{(0; \infty)}(\mu_i, \mu_j) (S^{(\infty)}(x))^{-1}$

die spezielle Lösung von (7.23), die die Matrizen $Q_k^{(0)}$ und $Q_k^{(\infty)}$ verbindet, d.h.

$$(7.34) \quad Q_k^{(0)} = Q_k^{(\infty)} S^{(0)}(x) E_k^{(0; \infty)}(\mu_i, \mu_j) (S^{(\infty)}(x))^{-1}$$

Wenn $S^{(0)}(x)$ so ausgewählt ist, daß

$$(7.35) (a) \quad S^{(0)}(0) = V^{(\infty)}(1)$$

gilt, dann gilt

$$(7.35) (b) \quad C_k^{(0; \infty)}(\mu_i, \mu_j) = E_k^{(0; \infty)}(\mu_i, \mu_j) + O(\mu_i, \mu_j)$$

Beweis:

Sei $S^{(0)}(x)$ die Lösung von (7.25) mit der Randbedingung

$$S^{(0)}(0) = V^{(\infty)}(1)$$

Ferner ist es klar, daß die Lösung von (7.22)

$$(7.36) (a) \quad R^{(\infty; 0)}(x) := V^{(\infty)}\left(\frac{1}{1-x}\right) \left(C_k^{(\infty; 0)}(\mu_i, \mu_j)\right)^{-1} \left(V^{(\infty)}\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)^{-1}$$

bzw. die Lösung von (7.23)

$$(7.36) (b) \quad T^{(\infty; 0)}(x) := S^{(0)}(x) \left(E_k^{(\infty; 0)}(\mu_i, \mu_j)\right)^{-1} \left(S^{(0)}(x)\right)^{-1}$$

die Matrizen $P_k^{(\infty)}(x)$ und $P_k^{(0)}(x)$ bzw. $Q_k^{(\infty)}(x)$ und $Q_k^{(0)}$ verbindet.

Ferner erhalten wir aus (7.28) für (7.36) (a)

$$(7.37) \quad R^{(\infty;0)}(x) = S^{(0)}(x) \left\{ (C_k^{(0;\infty)}(\mu_i; \mu_r))^{-1} + \int_0^x \frac{t}{(t-t)^2} (S^{(0)}(t))^{-1} [B_2(\mu_i; \mu_r); R^{(\infty;0)}(t)] S^{(0)}(t) dt \right\} (S^{(0)}(x))^{-1}$$

Damit erhalten wir aus (7.21) und (7.37)

$$(7.38) \quad \begin{aligned} P_h^{(0)}(x) R^{(\infty;0)}(x) &= P_h^{(\infty)}(x) = Q_h^{(0)}(x) S^{(0)}(x) (C_k^{(0;\infty)}(\mu_i; \mu_r))^{-1} (S^{(0)}(x))^{-1} \\ &+ Q_h^{(0)}(x) S^{(0)}(x) \left\{ \int_0^x \frac{t}{(t-t)^2} (S^{(0)}(t))^{-1} [B_2(\mu_i; \mu_r); R^{(\infty;0)}(t)] S^{(0)}(t) dt \right. \\ &+ \left. \left\{ \int_0^x dt \frac{t}{(t-t)^2} (S^{(0)}(t))^{-1} (Q_h^{(0)}(t))^{-1} [B_2(\mu_i; \mu_r); P_h^{(0)}(t)] (S^{(0)}(t)) \right\} \cdot \right. \\ &\cdot \left. \left\{ (C_k^{(0;\infty)}(\mu_i; \mu_r))^{-1} + \int_0^x \frac{t}{(t-t)^2} (S^{(0)}(t))^{-1} [B_2(\mu_i; \mu_r); R^{(\infty;0)}(t)] (S^{(0)}(t)) dt \right\} \right\} (S^{(0)}(x))^{-1} \end{aligned}$$

Wegen der Struktur von $B_2(\mu_i; \mu_r)$ (s. (1.19)) erhalten wir nun aus (7.18)

$$(7.39) \quad \left\{ \begin{aligned} P_h^{(\infty)}(x) &= Q_h^{(\infty)}(x) + O(\mu_i; \mu_r) = Q^{(0)}(x) S^{(0)}(x) (E_k^{(0;\infty)}(\mu_i; \mu_r))^{-1} \\ &\cdot (S^{(0)}(x))^{-1} + O(\mu_i; \mu_r) \end{aligned} \right.$$

Andererseits erhalten wir aus (7.38)

$$(7.40) \quad P_h^{(\infty)}(x) = Q^{(0)}(x) S^{(0)}(x) (C_k^{(0;\infty)}(\mu_i; \mu_r))^{-1} (S^{(0)}(x))^{-1} + O(\mu_i; \mu_r)$$

Da die linken Seiten von (7.39) und (7.40) identisch sind, müssen auch die rechten Seiten identisch sein. Daraus folgt

$$(7.41) \quad C_k^{(0;\infty)}(\mu_i; \mu_r) = E^{(0;\infty)}(\mu_i; \mu_r) + O(\mu_i; \mu_r)$$

Eine andere Hauptmatrix $G_k^{(10)}(x)$ der Matrix-D.Gl. (7.2) ist durch folgende Matrix gegeben

$$(7.46) \quad \begin{pmatrix} g_{1,1}^{(10)}(x) & g_{1,2}^{(10)}(x) \\ g_{2,1}^{(10)}(x) & g_{2,2}^{(10)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2\beta_1}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1-x)^{-\beta_1} \mathcal{L}_{1,1}^{(10)}(x) & (1-x)^{-\beta_1} \mathcal{L}_{1,2}^{(10)}(x) \\ (1-x)^{-\beta_1} \mathcal{L}_{2,1}^{(10)}(x) & (1-x)^{-\beta_1} \mathcal{L}_{2,2}^{(10)}(x) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2\beta_1}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{1,1}^{(10)}(x) & \mathcal{L}_{1,2}^{(10)}(x) \\ \mathcal{L}_{2,1}^{(10)}(x) & \mathcal{L}_{2,2}^{(10)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1-x)^\sigma & (1-x)^{-\sigma} \\ -\frac{\alpha}{2\sigma}(1-x)^\sigma & \frac{\alpha}{2\sigma}(1-x)^{-\sigma} \end{pmatrix},$$

wobei die Funktionen $\mathcal{L}_{i,j}^{(10)}(x)$, $\mathcal{L}_{i,j}^{(10)}(x)$ ($i,j=1,2$) folgendermaßen gegeben sind

$$(7.47) \quad \begin{cases} \mathcal{L}_{1,1}^{(10)}(x) = (1 - \frac{\beta_1}{\sigma})(1-x)^{\beta_1+\sigma} {}_2F_1 \left\{ \beta_1+\sigma; k-\beta_1+\sigma; 1+2\sigma; 1-x \right\} \\ \mathcal{L}_{2,1}^{(10)}(x) = -\frac{\alpha}{2\sigma}(1-x)^{\beta_1+\sigma} \times {}_2F_1 \left\{ 1+\beta_1+\sigma; k-\beta_1+\sigma; 1+2\sigma; 1-x \right\} \end{cases}$$

$$(7.48) \quad \begin{cases} \mathcal{L}_{1,2}^{(10)}(x) = (1 + \frac{\beta_1}{\sigma})(1-x)^{\beta_1-\sigma} {}_2F_1 \left\{ \beta_1-\sigma; k-\beta_1-\sigma; 1-2\sigma; 1-x \right\} \\ \mathcal{L}_{2,2}^{(10)}(x) = \frac{\alpha}{2\sigma}(1-x)^{\beta_1-\sigma} \times {}_2F_1 \left\{ 1+\beta_1-\sigma; k-\beta_1-\sigma; 1-2\sigma; 1-x \right\} \end{cases}$$

$$(7.49) \quad \begin{cases} \mathcal{L}_{1,1}^{(10)}(x) = \frac{1}{2}(1-\frac{\beta_1}{\sigma}) {}_2F_1 \left\{ \beta_1+\sigma; k-\beta_1+\sigma; 1+2\sigma; 1-x \right\} \\ \quad + \frac{1}{2}(1+\frac{\beta_1}{\sigma}) {}_2F_1 \left\{ \beta_1-\sigma; k-\beta_1-\sigma; 1-2\sigma; 1-x \right\} \\ \mathcal{L}_{2,1}^{(10)}(x) = -\frac{\sigma}{\alpha}(1-\frac{\beta_1}{\sigma}) {}_2F_1 \left\{ \beta_1+\sigma; k-\beta_1+\sigma; 1+2\sigma; 1-x \right\} \\ \quad + \frac{\sigma}{\alpha}(1+\frac{\beta_1}{\sigma}) {}_2F_1 \left\{ \beta_1-\sigma; k-\beta_1-\sigma; 1-2\sigma; 1-x \right\} \end{cases}$$

$$(7.50) \quad \begin{cases} \mathcal{L}_{2,1}^{(10)}(x) = \frac{\alpha}{4\sigma} \times {}_2F_1 \left\{ 1+\beta_1+\sigma; k-\beta_1+\sigma; 1+2\sigma; 1-x \right\} \\ \quad - \frac{\alpha}{4\sigma} \times {}_2F_1 \left\{ 1+\beta_1-\sigma; k-\beta_1-\sigma; 1-2\sigma; 1-x \right\} \\ \mathcal{L}_{2,2}^{(10)}(x) = \frac{1}{2} \times {}_2F_1 \left\{ 1+\beta_1+\sigma; k-\beta_1+\sigma; 1+2\sigma; 1-x \right\} \\ \quad + \frac{1}{2} \times {}_2F_1 \left\{ 1+\beta_1-\sigma; k-\beta_1-\sigma; 1-2\sigma; 1-x \right\} \end{cases}$$

§ 7.2 Strenge Integration der Matrix-D.Gl. (1.36): Bestimmung der Matrix

Aus dem Hilfssatz 7-1 ergibt sich, daß wir die Matrix-D.Gl. (1.26) unmittelbar integrieren können, wenn wir (7.2) und (7.3) integrieren. Dementsprechend reduziert sich unsere Aufgabe zu der Integration des D.Gl.Systems

$$(7.42) \quad \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{g}{x} + \frac{g + \mu_2}{1-x} \\ \frac{\alpha/2}{1-x} & \frac{1-k}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$$

das mit der Matrix-D.Gl. (7.2) gleichwertig ist.

Dieses D.Gl.System läßt sich mittels der hypergeometrischen Funktionen

${}_2F_1(a, b, c, x)$ integrieren. Wir fassen hier nur die Ergebnisse zusammen:

Eine Hauptmatrix $G_n^{(0)}(x)$ der Matrix-D.Gl. (7.2) ist durch folgende Matrix dargestellt

$$(7.43) \quad \begin{pmatrix} g_{2,1}^{(0)}(x) & g_{1,2}^{(0)}(x) \\ g_{2,1}^{(0)}(x) & g_{2,2}^{(0)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2\beta_1}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1-x)^{-\beta_1} \varphi_{2,1}^{(0)}(x) & (1-x)^{-\beta_1} \varphi_{1,2}^{(0)}(x) \\ (1-x)^{-\beta_1} \varphi_{2,1}^{(0)}(x) & (1-x)^{-\beta_1} \varphi_{2,2}^{(0)}(x) \end{pmatrix}$$

wobei die Funktionen $\varphi_{i,j}^{(0)}(x)$ folgendermaßen gegeben sind

$$(7.44) \quad \begin{aligned} \varphi_{1,1}^{(0)} &= (1-x)^{\sigma+\beta_1} {}_2F_1\left\{\beta_1+\sigma; k-\beta_1+\sigma; k; x\right\} \\ \varphi_{2,1}^{(0)} &= \frac{\alpha}{2k} (1-x)^{\sigma+\beta_1} {}_2F_1\left\{1+\beta_1+\sigma; k-\beta_1+\sigma; k-1; x\right\} \end{aligned}$$

und

$$(7.45) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_{1,2}^{(0)}(x) &= \frac{\sin 2\pi\beta_1}{\sin 2\pi\sigma} \cdot (1-x)^{\sigma+\beta_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta_1+\sigma)_n (k-\beta_1+\sigma)_n}{(k)_n (n)!} x^n \\ &- \frac{2}{\pi} \frac{\sin \pi(\beta_1+\sigma) \sin \pi(\beta_1-\sigma)}{\sin 2\pi\sigma} \cdot (1-x)^{\sigma+\beta_1} \left\{ \sum_{n=1}^{k-1} \frac{(n-1)! (1-k)_n}{(1-\beta_1-\sigma)_n (1-k+\beta_1-\sigma)_n} x^n \right. \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta_1+\sigma)_n (k-\beta_1+\sigma)_n}{n! (k)_n} x^n \left(-\ln x + \psi(k+n) + \psi(1+n) - \psi(\beta_1+\sigma+n) - \psi(k-\beta_1-\sigma) \right) \\ \varphi_{2,2}^{(0)}(x) &= \frac{\sin 2\pi\beta_1}{\sin 2\pi\sigma} \cdot (1-x)^{\sigma+\beta_1} \left(\frac{\alpha}{2k} x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+\beta_1+\sigma)_n (k-\beta_1+\sigma)_n}{(k+1)_n n!} x^n \right) \\ &- \frac{2}{\pi} \frac{\sin \pi(\beta_1+\sigma) \sin \pi(\beta_1-\sigma)}{\sin 2\pi\sigma} \cdot (1-x)^{\sigma+\beta_1} \left\{ \frac{\alpha}{2k} x \cdot \sum_{n=1}^k \frac{(n-1)! (1-k)_n}{(-\beta_1-\sigma)_n (1-k+\beta_1-\sigma)_n} x^n \right. \\ &+ \frac{\alpha}{2k} x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+\beta_1+\sigma)_n (k-\beta_1+\sigma)_n}{(k+1)_n n!} x^n \left(-\ln x + \psi(1+k+n) + \psi(1+n) \right. \\ &\left. \left. - \psi(1+\beta_1+\sigma+n) - \psi(1+\beta_1-\sigma+n) \right) \right\} \end{aligned} \right.$$

Zwischen den Hauptmatrizen $G_k^{(0)}(x)$ und $G_k^{(10)}(x)$ besteht folgende Beziehung

$$(7.51) \quad \begin{pmatrix} g_{1,1}^{(0)}(x) & g_{1,2}^{(0)}(x) \\ g_{2,1}^{(0)}(x) & g_{2,2}^{(0)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{1,1}^{(10)}(x) & g_{1,2}^{(10)}(x) \\ g_{2,1}^{(10)}(x) & g_{2,2}^{(10)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{\Gamma(k)\Gamma(1+2\sigma)}{\Gamma(1+\beta_1-\sigma)\Gamma(k+\beta_1-\sigma)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{\Gamma(k)\Gamma(1+2\sigma)}{\Gamma(1+\beta_1+\sigma)\Gamma(k+\beta_1+\sigma)} \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

In allen diesen Beziehungen ist β_1, σ folgendermaßen gegeben

$$(7.52) \quad \begin{cases} \beta_1 = \frac{k-1}{2} - \sqrt{\left(\frac{k-1}{2}\right)^2 + k_2 \frac{\sigma}{2}} \\ \sigma = \sqrt{\frac{\sigma}{2} \left(2k_2 - \frac{\sigma}{2}\right)} \end{cases}$$

Es ist wichtig hier festzustellen, daß die in (7.46) vorkommende Matrix

$$\begin{pmatrix} (1-x)^\sigma & (1-x)^{-\sigma} \\ -\frac{\sigma}{2\sigma} (1-x)^\sigma & \frac{\sigma}{2\sigma} (1-x)^{-\sigma} \end{pmatrix}$$

eine Hauptmatrix der Matrix-D.Gl. (7.3) ist, und daß

$$(7.53) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2\beta_1}{x} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{N}_{1,1}^{(10)}(x) & \mathcal{N}_{1,2}^{(10)}(x) \\ \mathcal{N}_{2,1}^{(10)}(x) & \mathcal{N}_{2,2}^{(10)}(x) \end{pmatrix} = I$$

ist. Damit erhalten wir aus (7.46), daß

$$(7.54) \quad Q^{(10)}(x) = \begin{pmatrix} 1 & -2\beta_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{N}_{1,1}^{(10)}(x) & \mathcal{N}_{1,2}^{(10)}(x) \\ \mathcal{N}_{2,1}^{(10)}(x) & \mathcal{N}_{2,2}^{(10)}(x) \end{pmatrix}$$

die gesuchte Hauptmatrix der Matrix-D.Gl. (1.26) mit dem Grenzwert I für ist. Ferner ist in dem Ausdruck

$$(7.55) \quad Q^{(10)}(x) = \begin{pmatrix} g_{1,1}^{(10)}(x) & -\frac{2\sigma}{x} g_{1,2}^{(10)}(x) \\ g_{2,1}^{(10)}(x) & -\frac{2\sigma}{x} g_{2,2}^{(10)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ch \left\{ \sigma \mathcal{L}_1(1-x) \right\} & \frac{2\sigma}{x} ch \left\{ \sigma \mathcal{L}_1(1-x) \right\} \\ \frac{\sigma}{2\sigma} ch \left\{ \sigma \mathcal{L}_1(1-x) \right\} & ch \left\{ \sigma \mathcal{L}_1(1-x) \right\} \end{pmatrix}$$

der erste Faktor eine Lösung $G(x)$ der Gleichung (7.2), der zweite Faktor das Inverse $S^{-1}(x)$ einer Lösung $S(x)$ der Gleichung (7.3). Daher folgt, daß

$Q^{(10)}(x)$ eine Lösung von (1.26) ist. Das speziell benutzte $G(x)$ erfüllt die Randbedingungen, die für $Q^{(10)}(x)$ gefordert waren. Da der zweite Faktor gegen I strebt, ist das durch (7.55) definierte $Q(x)$ identisch mit dem $Q^{(10)}(x)$, das wir suchen.

Ferner erhalten wir wegen (7.56) die Beziehung

$$(7.56) \quad Q^{(0)}(x) = Q^{(0)}(x) S^{(0)}(x) (V^{(0)}(1))^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \{\theta_1 + \theta_2\} & -\frac{\sigma}{2} (\theta_1 - \theta_2) \\ -\frac{\sigma}{2} \{\theta_1 - \theta_2\} & \frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} V^{(0)}(1) S^{(0)}(x)$$

mit

$$(7.57) \quad S^{(0)}(x) = \begin{pmatrix} ch \left\{ \sigma \ln(1-x) \right\} & \frac{2\sigma}{\alpha} sh \left\{ \sigma \ln(1-x) \right\} \\ \frac{\alpha}{2\sigma} sh \left\{ \sigma \ln(1-x) \right\} & ch \left\{ \sigma \ln(1-x) \right\} \end{pmatrix} V^{(0)}(2)$$

$$\theta_1 = \frac{\Gamma(k) \Gamma'(1-\sigma)}{\Gamma'(1+\beta, -\sigma) \Gamma'(k-\beta, -\sigma)} ; \quad \theta_2 = \frac{\Gamma(k) \Gamma'(1+\sigma)}{\Gamma'(1+\beta, +\sigma) \Gamma'(k-\beta, +\sigma)}$$

Daraus folgt

$$(7.58) \quad E_{\kappa}^{(0;0)}(\mu_1, \mu_2) = (V^{(0)}(1))^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \{\theta_1 + \theta_2\} & -\frac{\sigma}{2} (\theta_1 - \theta_2) \\ -\frac{\sigma}{2} \{\theta_1 - \theta_2\} & \frac{1}{2} \{\theta_1 + \theta_2\} \end{pmatrix} (V^{(0)}(1))$$

Nun reduziert sich $P_{\kappa}^{(0)}$ in (7.18) zu $\hat{Q}_{\kappa}^{(0)}(x)$, wenn $B_{\kappa}(\mu_1, \mu_2) = 0$ d.h. wenn $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0$. Aber in diesem Fall reduziert sich $Q_{\kappa}^{(0)}$ zu $P_{\kappa}(2)$ in (4.105), (4.106). Das war zu erwarten.

§ 7.3 Bestimmung einer guten Näherung der Eigenwertgleichung $\lambda_3(\mu_1, \mu_2) = 0$ im Fall $\mu_1 = -\mu_2$ und $|\mu_1| < \frac{\sigma}{2}$ (d.h. wenn $m = 0$ und $|K| < \frac{\sigma}{2}$ sind)

(a) Sei zunächst $\mu_2 > 0$

Aus (1.36) wissen wir, daß die Eigenwertgleichung jetzt folgendermaßen gegeben ist

$$(7.59) \quad \mathcal{U}_3^{(0)}(1) \left\{ \theta_1(\mu_1, \mu_2) + \theta_2(\mu_1, \mu_2) \right\} + \mathcal{U}_4^{(0)}(1) \left\{ \theta_1(\mu_1, \mu_2) - \theta_2(\mu_1, \mu_2) \right\} \frac{\sigma}{2} = O(\mu_1, \mu_2)$$

wobei (s. (3.32))

$$(7.60) \quad \begin{cases} \mathcal{U}_1^{(0)}(1) = \frac{(2\beta)^{-1/2}}{\sqrt{2}} \left\{ -\tau_2 W_{-(1/2, \tau_1)}; \sqrt{f\delta}(2\beta) + W_{(1/2, -\tau_1)}; \sqrt{f\delta}(2\beta) \right\} \\ \mathcal{U}_3^{(0)}(1) = \frac{(2\beta)^{-1/2}}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{|\mu_1|}{\mu_2} \right\}^{1/2} \left\{ \tau_2 W_{-(1/2, \tau_1)}; \sqrt{f\delta}(2\beta) + W_{(1/2, -\tau_1)}; \sqrt{f\delta}(2\beta) \right\} \end{cases}$$

mit

$$(7.61) \quad \begin{cases} \beta = \left\{ \frac{1}{2} \mu_1 \mu_2 \right\}^{1/2} \\ \tau_1 = \frac{1}{2} \left(\delta \left\{ \frac{\mu_2}{|\mu_1|} \right\}^{1/2} + \vartheta \left\{ \frac{|\mu_1|}{\mu_2} \right\}^{1/2} \right) \\ \tau_2 = \frac{1}{2} \left(\delta \left\{ \frac{\mu_2}{|\mu_1|} \right\}^{1/2} - \vartheta \left\{ \frac{|\mu_1|}{\mu_2} \right\}^{1/2} \right) \end{cases} ; \quad \begin{cases} \vartheta = \mu_2^{-1/2} \\ \delta = \frac{\sigma}{2} - |\mu_1| \end{cases}$$

Speziell erhalten wir auf der Halbgeraden

(s. Abb. 7-1),

also $M > 0, \mu = 0$

$$(7.62) \quad \begin{cases} \beta = \mu_1 \\ \gamma_1 = \frac{1}{2}(\delta + \vartheta) = 0 \\ \gamma_2 = \frac{1}{2}(\delta - \vartheta) = \frac{\mu}{2} - \mu_1 \end{cases} ; \quad \vartheta = -\delta = \mu_1 - \frac{\mu}{2}$$



(Abb. 7-1)

Nun setzen wir voraus, daß $\mu_2 < \frac{\mu}{2}$

ist. Dann erhalten wir

$$(7.63) \quad \begin{cases} \beta = \mu_2 \\ \gamma_1 = 0 \\ \gamma_2 = \frac{\mu}{2} + O(\mu_1) \end{cases} ; \quad \vartheta = -\delta = -\frac{\mu}{2} + O(\mu_1)$$

Ferner erhalten wir aus (7.52)

$$(7.64) \quad \sigma = i\frac{\mu}{2} + O(\mu_2) ; \quad \beta_k = \tilde{O}(\mu_1) = \begin{cases} O(\mu_1)^{1/2} & \text{für } k=1 \\ O(\mu_1) & \text{für } k>1 \end{cases}$$

Damit folgt aus (7.47)

$$(7.65) \quad \Theta_1(\mu_1, \mu_2) (-N_3^{(10)}(1) + i N_1^{(10)}(1)) + \Theta_2(\mu_1, \mu_2) (-N_3^{(10)}(1) - i N_1^{(10)}(1)) = O(\mu_1)$$

Nun ist die Whittakersche Funktion $W_{k,n}(z)$ in (7.60) folgendermaßen definiert

$$(7.66) \quad W_{k,n}(z) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma^2(\frac{1}{2} - \mu - k)} M_{k,n}(z) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma^2(\frac{1}{2} + \mu - k)} M_{k,-n}(z)$$

mit

$$(7.67) \quad M_{k,\pm\mu}(z) = e^{\pm\mu + 1/2} e^{-z/2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pm\mu - k + 1/2)_n}{(\pm 2\mu + 1)_n} z^n \right\}$$

In unserem Fall gilt:

$$(7.68) \quad \left\{ \begin{aligned} W_{-1/2; (i\frac{\mu}{2} + O(\mu_1))} \{ \mu_1 \} &= \frac{\Gamma(-i\mu + O(\mu_1))}{\Gamma(1 - i\frac{\mu}{2} + O(\mu_1))} M_{-1/2; (i\frac{\mu}{2} + O(\mu_1))} \{ \mu_1 \} \\ &+ \frac{\Gamma(i\mu + O(\mu_1))}{\Gamma(1 + i\frac{\mu}{2} + O(\mu_1))} M_{-1/2; -(i\frac{\mu}{2} + O(\mu_1))} \{ \mu_1 \} \\ W_{1/2; (i\frac{\mu}{2} + O(\mu_1))} \{ \mu_2 \} &= \frac{\Gamma(-i\mu + O(\mu_1))}{\Gamma(-i\frac{\mu}{2} + O(\mu_1))} M_{1/2; (i\frac{\mu}{2} + O(\mu_1))} \{ \mu_2 \} \\ &+ \frac{\Gamma(i\mu + O(\mu_1))}{\Gamma(i\frac{\mu}{2} + O(\mu_1))} M_{1/2; -(i\frac{\mu}{2} + O(\mu_1))} \{ \mu_2 \} \end{aligned} \right.$$

Nun erhalten wir wegen (7.67)

$$(7.69) \quad \begin{cases} M_{1/2; \pm(i\frac{\sigma}{2} + O(\mu_1))} \{z\mu_1\} = (2\mu_1)^{1/2} (2\mu_1)^{\pm i\frac{\sigma}{2}} (1 + O(\mu_1)) \\ M_{-1/2; \pm(i\frac{\sigma}{2} + O(\mu_1))} \{z\mu_1\} = (2\mu_1)^{1/2} (2\mu_1)^{\pm i\frac{\sigma}{2}} (1 + O(\mu_1)) \end{cases}$$

und folglich

$$(7.70) \quad \begin{cases} \frac{\sigma}{2} W_{-1/2; (i\frac{\sigma}{2} + O(\mu_1))} \{z\mu_1\} = (2\mu_1)^{1/2} \left\{ \frac{\Gamma(-i\sigma)}{\Gamma(-i\frac{\sigma}{2})} i (2\mu_1)^{+i\frac{\sigma}{2}} \right. \\ \quad \left. + \frac{\Gamma(i\sigma)}{\Gamma(i\frac{\sigma}{2})} (-i) (2\mu_1)^{-i\frac{\sigma}{2}} \right\} (1 + O(\mu_1)) \\ W_{1/2; (i\frac{\sigma}{2} + O(\mu_1))} \{z\mu_1\} = (2\mu_1)^{1/2} \left\{ \frac{\Gamma(-i\sigma)}{\Gamma(-i\frac{\sigma}{2})} (2\mu_1)^{i\frac{\sigma}{2}} \right. \\ \quad \left. + \frac{\Gamma(i\sigma)}{\Gamma(i\frac{\sigma}{2})} (2\mu_1)^{-i\frac{\sigma}{2}} \right\} (1 + O(\mu_1)) \end{cases}$$

Damit erhalten wir aus (7.60) schließlich

$$(7.71) \quad \begin{aligned} -\mathcal{U}_3^{(\infty)}(1) + i \mathcal{U}_1^{(\infty)}(1) &= \sqrt{2} (1+i) \frac{\Gamma(-i\sigma)}{\Gamma(-i\frac{\sigma}{2})} (2\mu_1)^{+i\frac{\sigma}{2}} (1 + O(\mu_1)) \\ -\mathcal{U}_3^{(\infty)}(1) - i \mathcal{U}_1^{(\infty)}(1) &= \sqrt{2} (1-i) \frac{\Gamma(i\sigma)}{\Gamma(i\frac{\sigma}{2})} (2\mu_1)^{-i\frac{\sigma}{2}} (1 + O(\mu_1)) \end{aligned}$$

Ferner folgt aus (7.51) und (7.52)

$$(7.72) \quad \begin{cases} \theta_1(\mu_1, \mu_2) = \frac{\Gamma(k) \Gamma(1-\sigma)}{\Gamma(1+\beta_1-\sigma) \Gamma(k-\beta_1-\sigma)} = \frac{\Gamma(k) \Gamma(1-i\sigma)}{\Gamma(1-i\frac{\sigma}{2}) \Gamma(k-i\frac{\sigma}{2})} (1 + O(\mu_1)) \\ \quad k > 1 \\ \theta_2(\mu_1, \mu_2) = \frac{\Gamma(k) \Gamma(1+\sigma)}{\Gamma(1+\beta_1+\sigma) \Gamma(k-\beta_1+\sigma)} = \frac{\Gamma(k) \Gamma(1+i\sigma)}{\Gamma(1+i\frac{\sigma}{2}) \Gamma(k+i\frac{\sigma}{2})} (1 + O(\mu_1)) \end{cases}$$

Ähnlicherweise erhalten wir

$$(7.73) \quad \begin{cases} \theta_1(\mu_1, \mu_2) = \frac{\Gamma(1-i\sigma)}{\Gamma(1-i\frac{\sigma}{2}) \Gamma(1-i\frac{\sigma}{2})} (1 + O(\mu_1)^{1/2}) \\ \theta_2(\mu_1, \mu_2) = \frac{\Gamma(1+i\sigma)}{\Gamma(1+i\frac{\sigma}{2}) \Gamma(1+i\frac{\sigma}{2})} (1 + O(\mu_1)^{1/2}) \end{cases} \quad (k=1)$$

Nun setzen wir (7.71) und (7.72) bzw. (7.73) in (7.65) ein, so erhalten wir

$$(7.74) \quad \Re \left\{ \mathcal{K} \exp \left\{ i \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sigma}{2} \ln \{2\mu_1\} \right) \right\} \right\} (1 + \tilde{O}(\mu_1)) = O(\mu_1)$$

mit

$$(7.75) \quad \mathcal{K} = - \frac{\Gamma(1-i\sigma) \Gamma(-i\sigma)}{\Gamma(1-i\frac{\sigma}{2}) \Gamma(-i\frac{\sigma}{2}) \Gamma(k-i\frac{\sigma}{2})} = |\mathcal{K}| e^{i\arg \mathcal{K}}$$

Für (7.74) ist zu beachten, daß $\tilde{O}(\mu_1) = O(\mu_1)$ für $k > 1$ und $\tilde{O}(\mu_1) = O(\mu_1)^{1/2}$ für $k = 1$ ist. Außerdem haben wir die Funktion $(2\mu_1)^{\pm i\frac{\sigma}{2}}$ folgendermaßen definiert

$$(7.76) \quad (2\mu_r)^{\pm i\frac{\alpha}{2}} := \exp \left\{ i\frac{\alpha}{2} \ln 2\mu_r \right\}$$

Aus (7.74) erhalten wir dann für unsere Eigenwertgleichung

$$(7.77) \quad \cos \left\{ \pi/4 + \frac{\alpha}{2} \ln 2\mu_r \right\} + \operatorname{Arg} \{K\} \} = \tilde{O}(\mu_r)$$

(b) Sei nun $\mu_r < 0$ (s. Abb. 7-1)

Dann erhalten wir für $N_1^{(a)}(1)$ und $N_3^{(a)}(1)$ in (7.59) (s. (3.74)):

$$(7.78) \quad \begin{cases} N_1^{(a)}(1) = \frac{(2\beta)^{-1/2}}{\sqrt{2}} \left\{ W_{(\nu_r+\tau_1); \sqrt{2}}(2\beta) + \tau_1 W_{(-\nu_r+\tau_1); \sqrt{2}}(2\beta) \right\} \\ N_3^{(a)}(1) = \frac{(2\beta)^{-1/2}}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{\mu_r}{|\mu_r|} \frac{1}{2} \left\{ W_{(\nu_r+\tau_1); \sqrt{2}}(2\beta) - \tau_1 W_{(-\nu_r+\tau_1); \sqrt{2}}(2\beta) \right\} \right\}, \end{cases}$$

wobei

$$(7.79) \quad \begin{cases} \beta = \left\{ \mu_r |\mu_r| \right\}^{1/2} \\ \tau_1 = \frac{1}{2} \left(\delta \left\{ \frac{|\mu_r|}{\mu_r} \right\}^{1/2} + \varrho \left\{ \frac{\mu_r}{|\mu_r|} \right\}^{1/2} \right) \\ \tau_2 = \frac{1}{2} \left(\delta \left\{ \frac{|\mu_r|}{\mu_r} \right\}^{1/2} - \varrho \left\{ \frac{\mu_r}{|\mu_r|} \right\}^{1/2} \right) \end{cases}$$

Speziell erhalten wir auf der Halbgeraden

$$(7.80) \quad \begin{aligned} \beta &= |\mu_r| \\ \tau_1 &= \frac{1}{2} (\delta + \varrho) = 0 \quad ; \quad \delta = -\varrho = \frac{\alpha}{2} + |\mu_r| \\ \tau_2 &= \frac{1}{2} (\delta - \varrho) = \frac{\alpha}{2} + |\mu_r| \end{aligned}$$

Ferner erhalten wir aus (7.78)

$$(7.81) \quad \begin{cases} N_3^{(a)}(1) + i N_1^{(a)}(1) = \frac{(2|\mu_r|)^{-1/2}}{2} \left\{ (1+i) W_{\nu_2; \sqrt{2}}(2\beta) - (1-i) \tau_1 W_{-\nu_2; \sqrt{2}}(2\beta) \right\} \\ N_3^{(a)}(1) - i N_1^{(a)}(1) = \frac{(2|\mu_r|)^{-1/2}}{2} \left\{ (1-i) W_{\nu_2; \sqrt{2}}(2\beta) - (1+i) \tau_2 W_{-\nu_2; \sqrt{2}}(2\beta) \right\} \end{cases}$$

mit $\tau_2 = \frac{\alpha}{2} + O(|\mu_r|)$

Damit erhalten wir aus (7.81), (7.80) und (7.70)

$$(7.82) \quad \begin{cases} N_3^{(a)}(1) + i N_1^{(a)}(1) = \sqrt{2} (1-i) \frac{\Gamma(-i\alpha)}{\Gamma(-i\frac{\alpha}{2})} (2|\mu_r|)^{i\frac{\alpha}{2}} (1 + O(|\mu_r|)) \\ N_3^{(a)}(1) - i N_1^{(a)}(1) = \sqrt{2} (1+i) \frac{\Gamma(i\alpha)}{\Gamma(i\frac{\alpha}{2})} (2|\mu_r|)^{-i\frac{\alpha}{2}} (1 + O(|\mu_r|)) \end{cases}$$

Schließlich folgt aus (7.82), (7.65), (7.57), (7.52) und (7.75):

$$(7.83) \quad \operatorname{Re} \left\{ K \exp \left\{ i \left(-\pi/4 + \frac{\alpha}{2} \ln 2|\mu_r| \right) \right\} \right\} = (1 + \tilde{O}(|\mu_r|))$$

Elementarprechend erhalten wir für unsere Eigenwertgleichung in diesem Fall

$$(7.84) \quad \cos \left\{ -\pi/4 + \frac{\alpha}{2} \ln 2|\mu_r| \right\} + \operatorname{Arg} \{K\} \} = \tilde{O}(|\mu_r|)$$

Nun wollen wir den Betrag und das Argument K bestimmen.

Wir erhalten aus den Eigenschaften

$$(7.85) \quad \begin{cases} \Gamma(1-z) = z \Gamma(z) \\ \Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \end{cases}$$

folgende Beziehungen

$$(7.86) \quad \begin{cases} \Gamma(1 \mp i\alpha) \Gamma(\pm i\alpha) = \pm \frac{\pi}{\sin i\pi\alpha} = \mp i \frac{\pi}{\sinh \pi\alpha} \\ \Gamma(1 \mp i\frac{\alpha}{2}) \Gamma(\pm i\frac{\alpha}{2}) = \mp i \frac{\pi}{\sinh \frac{\pi\alpha}{2}} \\ \Gamma(k+i\frac{\alpha}{2}) \Gamma(k-i\frac{\alpha}{2}) = \{(k-1)!\}^2 \frac{i\pi\frac{\alpha}{2}}{\sin(i\pi\frac{\alpha}{2})} \prod_{n=1}^{k-1} (1 + \frac{\alpha^2}{4n^2}) \\ k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Daraus folgt

$$(7.87) \quad |K| = \frac{\sinh \frac{\pi\alpha}{2}}{\sinh \pi\alpha} \left\{ \frac{\sinh \frac{\pi\alpha}{2}}{\pi \frac{\alpha}{2}} \right\}^2 \frac{1}{(k-1)!} \prod_{n=1}^{k-1} (1 + \frac{\alpha^2}{4n^2})^{-1/2}$$

Ferner

$$\begin{aligned} \arg \{K\} &= \arg \left\{ \frac{\Gamma(1+i\alpha) \Gamma(i\alpha) \Gamma(1-i\alpha) \Gamma(-i\alpha)}{\Gamma(1+i\alpha) \Gamma(i\alpha) \Gamma(1-i\frac{\alpha}{2}) \Gamma(-i\frac{\alpha}{2}) \Gamma(k-i\frac{\alpha}{2})} \right\} = \\ &= \arg \left\{ \left(\frac{1}{\Gamma(i\alpha)} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\Gamma(1-i\frac{\alpha}{2})} \right)^2 \cdot \frac{1}{\Gamma(k-i\frac{\alpha}{2})} \right\} \end{aligned}$$

Folglich erhalten wir

$$(7.88) \quad \arg \{K\} = 2 \arg \left\{ \frac{1}{\Gamma(i\alpha)} \right\} + 2 \arg \left\{ \frac{1}{\Gamma(1-i\frac{\alpha}{2})} \right\} + \arg \left\{ \frac{1}{\Gamma(k-i\frac{\alpha}{2})} \right\}$$

Man kann aber die $\Gamma(z)$ Funktionen als ein unendliches Produkt darstellen [26]

$$(7.89) \quad \frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma_0 z} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{z}{n}) e^{-\frac{z}{n}}.$$

Dabei ist γ_0 die Eulersche Konstante

$$(7.90) \quad \gamma_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu} - \ln n \right) = 0.577215 \dots$$

Dementsprechend erhalten wir

$$(7.91) \quad \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(i\alpha)} = i\alpha e^{i\gamma_0\alpha} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + i\frac{\alpha}{n}) e^{-i\frac{\alpha}{n}} \\ \frac{1}{\Gamma(-i\frac{\alpha}{2})} = -i\frac{\alpha}{2} e^{-i\gamma_0\frac{\alpha}{2}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - i\frac{\alpha}{2n}) e^{+i\frac{\alpha}{2n}} \end{cases}$$

$$(7.92) \quad \begin{cases} \arg \left\{ \frac{1}{\Gamma(i\alpha)} \right\} = \eta/2 + \gamma_0 \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\theta_n - \frac{\alpha}{n} \right) \\ \arg \left\{ \frac{1}{\Gamma(-i\frac{\alpha}{2})} \right\} = -\eta/2 - \frac{1}{2} \gamma_0 \alpha - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n - \frac{\alpha}{2n} \right), \end{cases}$$

wobei

$$(7.93) \quad \begin{cases} \theta_n = \arctg \frac{\alpha}{n} \\ \varphi_n = \arctg \frac{\alpha}{2n} \end{cases}$$

Ferner gilt

$$(7.94) \quad \Gamma(k - i\frac{\alpha}{2}) = (-i\frac{\alpha}{2}) \{ (-i\frac{\alpha}{2}) + 1 \} \cdots \{ (-i\frac{\alpha}{2}) + k-1 \} \Gamma(-i\frac{\alpha}{2})$$

Folglich haben wir

$$\frac{1}{\Gamma(k - i\frac{\alpha}{2})} = \frac{(-i\frac{\alpha}{2}) e^{-i\gamma_0 \frac{\alpha}{2}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - i\frac{\alpha}{2n}) e^{i\frac{\alpha}{2n}}}{(-i\frac{\alpha}{2}) \prod_{n=1}^{k-1} (n - i\frac{\alpha}{2})}$$

und

$$(7.95) \quad \arg \left\{ \frac{1}{\Gamma(k - i\frac{\alpha}{2})} \right\} = -\frac{1}{2} \gamma_0 \alpha + \sum_{n=1}^{k-1} \varphi_n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n - \frac{\alpha}{2n} \right)$$

Nun setzen wir (7.92) und (7.95) in (7.88) ein. Dann erhalten wir

$$(7.96) \quad \arg \{K\} = \frac{1}{2} \gamma_0 \alpha + \sum_{n=1}^{k-1} \varphi_n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\theta_n - \frac{\alpha}{n} \right) - 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n - \frac{\alpha}{2n} \right)$$

Aber

$$(7.97) \quad \begin{aligned} \theta_n - \frac{\alpha}{n} &= \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{(\frac{\alpha}{n})^{2s+1}}{2s+1} \\ \varphi_n - \frac{\alpha}{2n} &= \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{(\frac{\alpha}{2n})^{2s+1}}{2s+1} \end{aligned}$$

und dementsprechend

$$(7.98) \quad \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\theta_n - \frac{\alpha}{n} \right) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{2s+1} \left(\frac{\alpha}{2} \right)^{2s+1} \zeta(2s+1) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n - \frac{\alpha}{2n} \right) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{2s+1} \alpha^{2s+1} \zeta(2s+1) \end{cases},$$

wobei $\zeta(2)$ die Zeta-Funktion von Riemann [27]

$$(7.99) \quad \zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

ist. Wir erhalten schließlich aus (7.96) und (7.98)

$$(7.100) \quad \begin{aligned} \arg \{K\} &= \frac{\alpha}{2} \left\{ \gamma_0 + 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{2s+1} \left(\frac{\alpha}{2} \right)^{2s} \left(\sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n^{2s+1}} \right) \right. \\ &+ \left. \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{2s+1} \zeta(2s+1) \left(\frac{\alpha}{2} \right)^{2s} [2^{2s-3}] \right\} \end{aligned}$$

wobei für $k=1$ die Summe $\sum_{n=1}^{k-1} \epsilon$ durch Null zu ersetzen ist.

Referenzen

- 1 F. Bopp und W. Lutzenberger, The electron and the muon as Eigensolutions of the Quantum Electromechanics under the Green-Function
Z. für Naturforschung, 28a, 1973
- 2 N.W. Golubew, Vorlesungen über Differentialgleichungen im Komplexen,
D.V.W., Berlin 1958, S. 21
E. Kauke, Differentialgleichungen reeller Funktionen, A.V.,
Leipzig 1956, Kap. 5
J. Horn, Gewöhnliche Differentialgleichungen, 2.Aufl. Berlin, Leipzig,
de Gruyter 1927, 4. Kapitel
P. Hartmann, Ordinary differential equations, John Wiley & Sons,
New York, Chap. 4
- 3 E.T. Whittaker and G.N. Watson, A course of modern analysis,
Cambridge at the university press 1965, Chap. XVI
- 4 W. Magnus and F. Oberhettinger, R.P. Soni, Formulas and Theorems of
the Special Functions of Mathematical Physic, 3.Edition, pag. 301
- 5 W. Magnus and F. Oberhettinger, R.P. Soni, (s. 4) pag. 298
H. Buchholz, Die konfluente hypergeometrische Funktion, Springer
Berlin 1953, S. 18
- 6 (s. 4 pag. 302
- 7 E.T. Whittaker and G.N. Watson (s. 3) p. 343
I.M. Ryshik und I.S. Gradstein, Summen-, Produkt- und Integraltafeln
D.V.W. Berlin 1957, S. 400.
H. Buchholz, (s. 5), S. 91
- 8 I.M. Ryshik und I.S. Gradstein, (s. 7), S. 402
H. Buchholz (s. 5) S. 23
- 9 (s. 8)
- 10 E. Kauke, Differentialgleichungen; Lösungsmethoden und Lösungen,
A.V. Leipzig 1961, S. 440
W. Magnus und F. Oberhettinger, Formeln und Sätze für die speziellen
Funktionen der mathematischen Physik, Springer-Verlag Berlin 1943, S.18
- 11 G.N. Watson, A treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge
university press 1966, p. 18 und 66
W. Magnus and F. Oberhettinger, R.P. Soni, (s. 4). p. 139

- 12 G.N. Watson (s. 11), s. 195 und 199
I.M. Ryshik und I.S. Gradstein, (s. 7), S. 321.
W. Magnus und F. Oberhettinger (s. 4), S. 139
- 13
- 14 H. Buchholz, (s. 5), S. 30 und 92
- 15 G.N. Watson, (s. 11), S. 72 und 202
- 16 W. Magnus und F. Oberhettinger, (s. 4) S. 67 und 139
- 17 bis 21
W. Magnus und Oberhettinger (s. 4), S. 42, 41, 37, 43, 45.
H. Bateman, *Higher Transcendental Functions*, Vol. 1, Mc Graw-Hill 1953, S. 56, 102, 57, 105, 63.
- 22 E.L. Ince, *Ordinary differential equations*, Dover Publications, Inc. 1956 p. 369
L. Bieberbach, *Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen*, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1953, S. 132 - 138.
- 23 W. Wasow, *Asymptotic expansions for Ordinary Differential Equations* Interscience Publishers 1965, S. 60, 61.
- 24 E.A. Coddington und N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, Mc Graw-Hill, New York 1955, p. 143
- 25 E.R. Gantmacher, *Matrizenrechnung Teil I*, D.V.W. Berlin 1958, S. 204
- 26 H. Bateman, (s. 17), S. 2
W. Magnus und F. Oberhettinger,... (s. 4), S. 1
- 27 E.T. Whittaker und G.N. Watson, (s. 3), pag. 265
H. Bateman, (s. 17) S. 24
W. Magnus und F. Oberhettinger... (s. 4), S. 22.

L e b e n s l a u f

Ich wurde am 24. April 1945 als Sohn des "Daniel Fernández" und seiner Ehefrau "Gloria Velicia" in Valladolid geboren.

Nach 4 Jahren Grundschule in Torrelavega (bei Santander) wechselte ich in die Oberschule nach Valladolid über; hier legte ich im Juni 1963 das Abitur mit Erfolg ab. Zum Oktober 1963 immatrikulierte ich mich an der naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Valladolid.

Hier studierte ich 5 Jahre (10 Semester) Physik und schloss meine Studien im Juni 1968 mit dem Staatsexamen ab. Meine Diplomarbeit lautete: "Ein neuer Typ von Quantenkorrekturen für die Gleichung von Thomas Fermi". Diese Arbeit legte ich im Dezember 68 vor. Ich erhielt die Note "sehr gut". Im Oktober des gleichen Jahres wurde ich zum Assistenten für das Fach Quantenmechanik, das im 5. Studienjahr gelehrt wird, ernannt. Ich belegte zur gleichen Zeit zwei Doktorkurse, den einen über "Fortgeschrittene Quantenmechanik (Analytische Theorie der Strahlung)", den anderen über "Distributionentheorie, vektorielle und topologische Räume".

Zum Juni 1969 bekam ich für diese beiden Kurse die Note "sehr gut". Im Sommer 69 bekam ich ein Stipendium, um den Internationalen Sommerkurs über "Theoretische Physik" beizuwohnen, der in Mallorca stattfand und vom Generalrat für wissenschaftliche Forschung (in Spanien) patrosiniert wurde. Zu Beginn des Studienjahres 69/70 wurde ich zum Assistenten mit "Dedicación Exclusiva" für Quantenmechanik ernannt.

Ich belegte auch hier wieder zwei Doktorkurse den einen über "Kernmodelle", den anderen über "Mathematische Aspekte der Teilchenphysik". Auch hier bekam ich im Juni 70 die Note "sehr gut".

Meine ersten Kontakte mit Deutschland hatte ich durch das "Institut für Kernphysik" an der Universität Köln. Von diesem Institut erhielt ich ein Stipendium, um an dem Kongress "Physica 70" teilzunehmen.

Seit Oktober 70 lebe ich in Deutschland, wo ich mit Hilfe eines Stipendiums des D.A.A.D. mein Studium an der Universität München fortsetze.

Zur Zeit arbeite ich unter der Leitung von Professor Dr. Fritz Bopp auf dem Gebiet der Theorie der Elementarteilchen und lege dem Fachbereich Physik der Universität München die Dissertation "Selbstenergieproblem der Quantenelektrodynamik in relativistischer Retardierungsapproximation" vor.

München, den 14. Mai 1975

F.Javier FERNÁNDEZ

